TANGRAM VEVÝUCE MATEMATIKY NA 2. STUPNI

Jaroslava Brincková, Miroslav Haviar[*] a Iveta Dzúriková[**]

ÚVOD

Učení je na jedné straně výsledek činnosti, ale zároveň se činností také rozvíjí. Mezi činnosti velmi často využívané ve výuce jsou často matematické hry. Pokud tyto hry probíhají podle určitých pravidel, které odpovídají didaktickým cílům, nazýváme je *didaktickými hrami* ve výukovém procesu. Mezi didaktické hry patří i geometrické skládačky, mezi něž řadíme také starověkou čínskou skládačku nazývanou tangram. Z hlediska vzdělávacího procesu tangramy pomáhají při výuce geometrie, protože rozvíjejí:

1. znalosti z oblasti geometrie,
2. odůvodňování,
3. geometrickou představivost.

Geometrickou představivostí rozumíme schopnost vnímat:

- geometrické útvary, jejich velikost a pozici v prostoru,
- konkrétní geometrický útvar různě umístěný v prostoru,
- změny velikosti, struktury atd. útvarů,
- útvar v prostoru podle projekce v rovinně a slovního popisu,
- znázornění konkrétného útvaru v rovině.

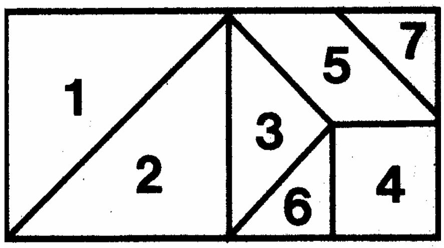
[*] Pedagogická Fakulta, Univerzita Mateja Bela, Banská Bystrica, Slovenská Republika.

[**] 8. ročné evanjelické gymnázium, Banská Bystrica, Slovenská Republika.

Hlavní pilotáž

Jaroslava Brincková a Iveta Dzúriková

Při výuce geometrie lze díky modelování tangramu z papíru v E_2 (rovině) či ze stavebnicových dílů v E_3 (prostoru) provozovat činnosti, které rozvíjejí geometrickou představivost.



Obrázek 1: Tangram

Pravidla používání tangramu

- Při tvoření libovolného tvaru musí být vždy použito všech 7 dílků tangramu.
- Žádné dílky tangramu se nesmějí překrývat.
- Všechny dílku tangramu lze v případě potřeby použít i z rubové strany.

Při výuce geometrie lze dílky tangramové skládačky použít v zásadě dvěma způsoby:

- *Pro modelování předem určeného útvaru* – takto lze procvičovat a rozvíjet geometrickou představivost, smysl pro geometrické útvary a jejich vlastnosti; dítě vnímá plochu.
- *Pro zaplnění ohraničené plochy danými dílky* – v tomto případě existují tři možnosti:
    - Tvar je daný ohraničením plochy.
    - Všechny body útvaru mají stejnou barvu – vyplněný útvar.
    - Útvar je umístěn ve čtvercové síti.

Při modelování předem určeného útvaru musejí žáci porovnávat hranice jednotlivých útvarů a vybrat vhodný dílek tangramu, který do vytvářeného útvaru při určitém natočení pasuje. Žáci si vybavují geometrické útvary, jejich velikost a umístění v prostoru, vnímají jeden útvar v různých umístěních v prostoru atd.

Při zaplňování ohraničeného prostoru jednotlivými dílky existuje několik úrovní obtížnosti. Výzkum ukazuje, že žáci nejnižších ročníků nevnímají čtvercovou síť jako nástroj, který jim pomáhá při práci s pravidelnými čtyřúhelníky, ale vnímají ji jako dvoubarevné prostředí, tedy jako papír s obrázky. Teprve postupně se učí „vnímat" rovnoběžky a kolmice. Nejúspěšnější jsou tehdy, pokud jsou dány hranice zadaného útvaru.

Při výuce geometrie na 2. stupni základních škol a nižším gymnáziu lze tangram využívat při různých motivačních úkolech, při procvičování obsahu, obvodu, osové souměrnosti a podobnosti útvarů, při dokazování Pythagorovy věty a při výkladu racionálních čísel. Také pomáhá při procvičování zobrazování ve čtvercové síti. Není však ideálním nástrojem pro výuku geometrických pojmů, protože se skládá pouze z jednoho ze sedmi typů trojúhelníků (pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku), ze dvou čtyřúhelníků (čtverce a rovnoběžníku) a neobsahuje kruh.

Hlavní myšlenky

Vliv jednobarevné a mnohobarevné vyučovací pomůcky na úspěšnost žáků. Rozvoj schopnosti vnímat obvod a obsah nekonvexního obrazce v rovině.

Vliv grafického prostředí (čtverečkovaný papír, barevný papír, čistě bílý papír) na schopnost zobrazit určitý model v rovině. Zjistit obvod a obsah různých dílků skládačky.

1. Název: *Tangram pro měření obvodu a obsahu*

2. Rozvíjené matematické oblasti:

Měření obrazců v rovinně s použitím nestandardních jednotek měření.

3. Popis úlohy

Obecným cílem tohoto návrhu je, aby si studenti – budoucí učitelé matematiky uvědomili, jaký význam mají úlohy s měřením pro matematický rozvoj žáků. Hru s tangramem využíváme v seminářích pro studenty učitelství 2. stupně v rámci příparvy na výuku geometrie na 2. stupni základních škol a na nižších gymnáziích (věk 11 – 14 let). Hlavním cílem je rozvoj tvořivého myšlení a geometrické představivost žáků. Naším záměrem je připravit takovou školní úlohu, ve které se v různém kontextu pracuje s pojmy obvod a obsah. Tangram chceme využít pro názorné předvedení zobrazování ve čtvercové síti při měření obvodu a obsahu.

Zaměřujeme se na následující dílčí cíle:

- Didaktické vysvětlení posloupnosti kroků při modelování geometrických pojmů obvod a obsah dvojrozměrných obrazců: *pozorování – modelování – zobrazování v rovině – měření – rýsování – odvození funkčních vztahů.*
- Popis van Hielových1 úrovní geometrického myšlení, obzvláště se zaměřením na odvozování funkčních vztahů s použitím geometrických termínů.
- Modelování ve světě čísel a tvarů s použitím úsečky a jednotky.
- Nalezení vztahů mezi obvodem a obsahem pro různé obrazce.
- Pouze pro 14ti leté žáky: měření velikosti různých obrazců a vypočítání jejich obvodu a obsahu s pomocí Pythagorovy věty a algebraických výrazů.

4. Cíle

Pro žáky 2. stupně ZŠ a nižších gymnázií

- Kombinace využití aritmetiky, algebry a geometrie v rámci zadaných úkolů.

---
[1] Van Hiele, P.M.: Structure & Insight. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1983

- Využití skládačky tangram pro modelování a měření obvodu obsahu v geometrii v rovině.
- Formulování hypotéz, rozhodování, kontrola a ověření výsledků.

Pro studenty učitelství

- V matematice: Zkoumat různé úlohu měřením v geometrii (modelovat vztah mezi čísly a tvary).
- V metodologii: Skupinová práce – tvorba didaktického materiálů pro podporu motivace žáků. Testování těchto materiálů ve 4 krocích:
    - vnímání, modelování a zobrazování;
    - definice pojmů a měření;
    - postup při skládání;
    - rozkládání.

Pro vyučující VŠ

- Vést studenty učitelství k tomu, aby upravili svůj plán hodiny s ohledem na věk, úroveň a specifické potřeby žáků a aby zodpovědně vybírali jednotlivé úlohy atd.
- Poskytnout zadání a zpětnou vazbu.

5. Zadání

Pro studenty učitelství

Vnímání, modelování a zobrazování

<u>*Úloha č. 1*</u> – Studenti učitelství se seznámí s pravidly hry Tangram. Podle obrázku jedna narýsují jednotlivé dílky skládačky na papír. Studenti hru připraví ve dvou verzích, bílé a barevné, což v praxi znamená, že ve verzi 1 zůstanou tvary 1 – 7 čistě bílé a ve verzi dvě se obarví tak, aby sousedící tvary měly vždy jinou barvu. V obou verzích dílky skládačky tangram vystřihnou. Studenti používají dílky obou verzí tangramu odděleně k modelování různých složených tvarů z obrázku 2.

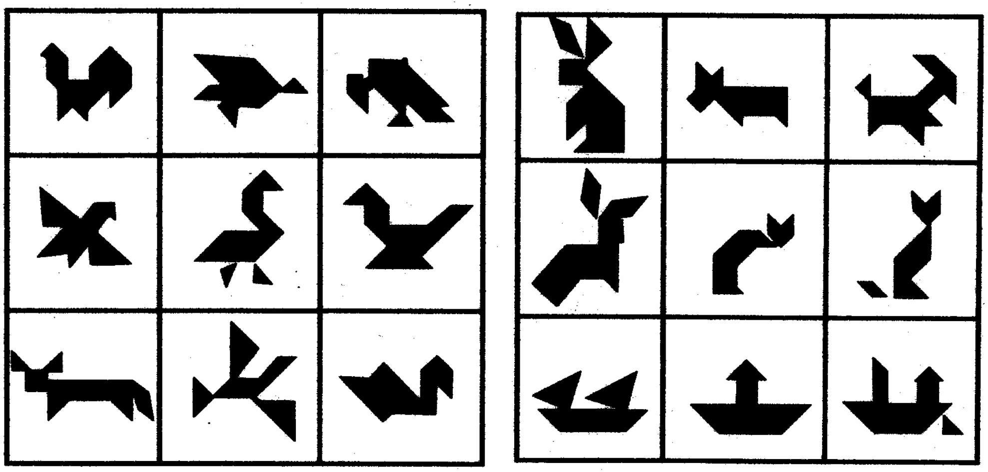
Studenti učitelství používají všechny dílky tangramu k vytvoření různých tvarů z obrázku dvě i k tvorbě jiných tvarů, například tvaru dívka, svíčka atd.

Obkreslí (ručně) každý vytvořený model v obou verzích (bílý vs. barevný) na tři různé listy papíru: bílý, čtverečkovaný a barevný.

Prodiskutují vliv různého pozadí na listech papíru i obou verzí tangramu na schopnost obkreslit přesný obrys složených tvarů tangramu.

Poté prodiskutují vliv různobarevných dílků na schopnost vnímat obrys obrazce. Měli by si také uvědomit, jak různě ovlivňují obě verze tangramu (bílá vs. barevná) schopnost vnímat hranice nakreslených obrázků.

V další fázi studenti učitelství prodiskutují, jaké jsou možnosti hry tangram při výuce klasifikace čtyřúhelníků pro věkovou skupinu 11 – 14 let.



Obrázek 2: Složené tvary

Definice pojmů a měření

<u>*Úloha č. 2*</u> – (Viz také Pojmové mapy – Měření v Příloze nebo slovenskou webovou stránku www.zoznam.sk/katalogy/Vzdelavanie/Slovniky/.) Studenti učitelství ve výkladovém slovníku vyhledají význam pojmů obvod a obsah v různém kontextu. Zkoumají význam pojmu obvod a obsah v různých oblastech (zeměpis, literatura, elektrotechnika, občanská nauka, umění, geometrie, …). Tento postup má vést k tomu, aby studenti učitelství chápali, že pojem obvod (obsah) v matematice znamená délku uzavřené křivky určené (uspořádanou) dvojicí [číslo, jednotka], nikoli hranici (plochu) rovinného obrazce.

Postup skládání [*viz Obrázek 1*]

Můžeme používat dvě jednotky – jednou jednotkou může být strana čtverce 4 (nazývejme ji *s*), druhou jednotkou je přepona trojúhelníku 7 (nazývejme ji *h*).

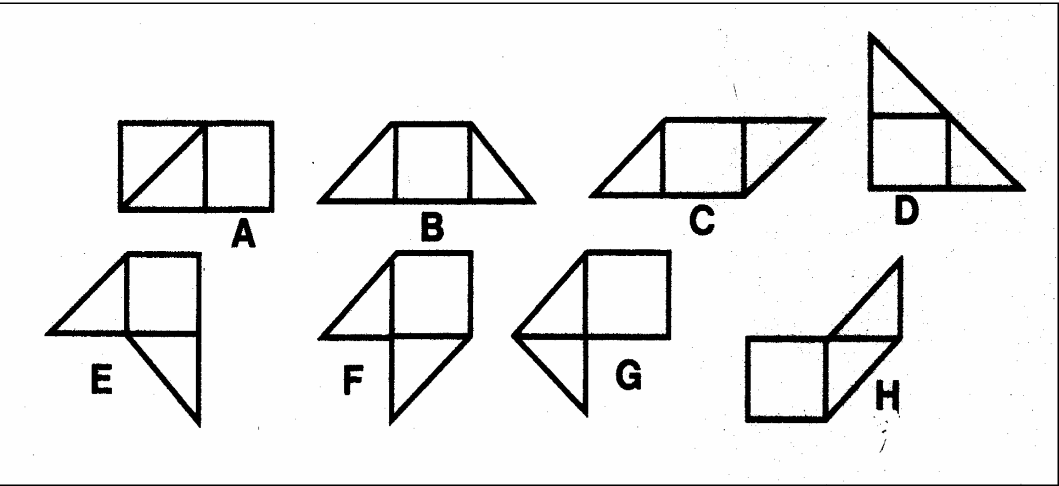
Ukazujeme, že známe-li *obvod (obsah)*, je možné podle instrukcí vytvořit rovinné obrazce s různým *obsahem (obvodem)*.

<u>*Úloha č. 3*</u> – S použitím dvou shodných trojúhelníků (tedy buď z trojúhelníků 1 a 2, nebo 6 a 7), vytvořte takové útvary, aby měly strany se stejnou délkou. Vymodelované řešení překreslete do sešitů. Obvod vymodelovaných útvarů vyjádřete pomocí jednotek *s* a *h*.
<u>*Úloha č. 4*</u> – S použitím čtverce 4 a dvou trojúhelníků 6 a 7 tangramu vytvořte takové rovinné útvary, aby něly strany stejné délky. Najděte všechan řešení a roztřiďte je podle obvodu, podle počtu a velikosti úhlů a podle rovnoběžných stran.

Položí-li obrazce k sobě, žáci vidí, že jedna strana trojúhelníku je delší než strana čtverce. Což otevírá možnost zahájit zajímavou a didakticky přínosnou diskusi – co s tím můžeme udělat? Za předpokladu, že nemůžeme měřit – jak můžeme určit obrazce? Které obrazce mají stejný obvod?

Můžeme používat dvě jednotky – s a h. Takže obvody jsou: A je *6s*, B je *4s + 2h*, C je *4s + 2h*, … atd. (Všimněte si, že všechny obvody kromě obvodu obrazce A jsou *4s + 2h*.) To by mělo podporovat používání znaků (*s, h*) při řešení úlohy a také otevírá následující otázku:

Jaký obvod mají všechny ostatní útvary tangramu?



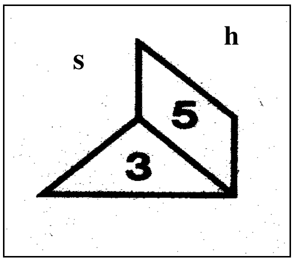
Obrázek 3: Výsledky

Postup rozkládání [*viz Obrázek 1*]

Úloha č. 5 – Žáci složí všechny části tangramu a vytvoří: a) trojúhelník, b) čtverec, c) obdélník. Pečlivě si prohlédnou rozdíly mezi bílým a obarveným tangramem.

Úloha č. 6 – Vytvořte trojúhelníky z 2, 3, 4, 5, 6 a všech dílků barevného tangramu. Nakreslete barevné modely. Najděte všechan řešení složená z pěti částí.

Úloha č. 7 – Barborka vytvořila pětiúhelník. Podívejte se na obrázek 4 a vytvoř nový s použitím dílků č. 3 a 5. Které další části tangramu potřebujete k vytvoření stejného tvaru? Jednou z možností je použít části 4, 6 a 7. Najděte všechna řešení.



Obrázek 4: Pětiúhelník

Obsah a obvod obrazců v rovině [*viz Obrázek 1*]

Úloha č. 8 – Z trojúhelníků 6 a 7 vytvořte všechny možné tvary. Pokud stanovíme, že jednotkou dílků tangramu je délka strany čtverce s a délka přepony trojúhelníků h, sledujte vztah mezi obvodem a obsahem.

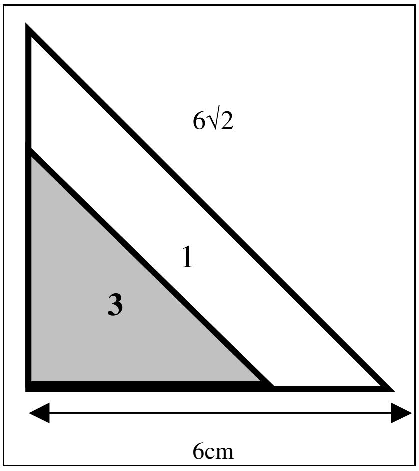
Abyste byli schopni klasifikovat jednotlivé útvary, nemusíte znát výšku trojúhelníků ani měřit obsah. Můžeme použít jednotku obsahu – *T* (obsah trojúhelníku 6 nebo 7). Všechny tvary mají stejný obsah – *2T*.

Úloha č. 9 – Utvořte tvary na obrázku 3 z trojúhelníků 6 a 7 a čtverce 4 tangramu. Porovnejte jejich obvody a obsahy.

Úloha č. 10 – Je-li jednotkou obsahu obsah některého z nejmenších trojúhelníků tangramu – *T*, určete obsahy různých dílků puzzlu.

Rozšiřující úloha [*viz Obrázek 1*]

Honza přiložil trojúhelník č. 3 tangramu k vrcholu proti přeponě velkého trojúhelníku č. 1 tangramu, viz obrázek 5. Vypočítejte s pomocí jednotek s a h obsah nově vytvořeného lichoběžníku (je modře vybarven). (*Měl by být stejný jako obsah trojúhelníku 3?*) Obsah vyjádřete pomocí cm^2: délka krátké strany trojúhelníku 1 je 6 cm a délka přepony je 6√2 cm.



Obrázek 5: Trojúhelník

Pro žáky 2. stupně ZŠ a nižších gymnázií

Žáci podle obrázku 1 narýsují dílky skládačky na papír. Hru připraví ve dvou verzích, *bílé* a *barevné*, což v praxi znamená, že ve verzi 1 zůstanou tvary 1 – 7 čistě bílé a ve verzi dvě se obarví tak, aby sousedící tvary měly vždy jinou barvu. V obou verzích dílky skládačky tangram vystřihnou. Žáci používají dílky obou verzí tangramu (bílé a barevné) odděleně k modelování různých *složených tvarů* z obrázku. Přitom se naučí pravidla hry tangram.

Obkreslí (ručně) každý vytvořený model v obou verzích (bílá vs. barevná) na tři různé listy papíru: bílý, čtverečkovaný a barevný. Prodiskutují vliv různého pozadí na listech papíru i obou verzí tangramu na schopnost obkreslit přesný obrys složených tvarů tangramu.

Poté prodiskutují vliv různobarevných dílků na schopnost vnímat obrys obrazce. Měli by si uvědomit, jak různě ovlivňují obě verze tangramu (bílá vs. barevná) schopnost vnímat hranice nakreslených obrázků.

Pak žáci s použitím dílků tangramu vytvoří kočku, psa, zajíce a proberou možnosti práce se skládačkou tangram při určování čtyřúhelníků.

Žáci se naučí potřebnou terminologii v angličtině: základna, výška, přepona, pravý úhel, kolmice a (v případě tangramu) rovnoramenný, a dále pojmy týkající se podobnosti, tedy otočení, posun a zobrazení.

Vysvětlí, jak se v různých kontextech používají pojmy obvod a obsah.

*Mohou používat dvě jednotk*y – jednou jednotkou je strana čtverce 4 (označovaná *s*), druhou jednotkou je délka přepony trojúhelníku 7 (označovaná h). Žáci postupně zjistí, že, je-li dán *obvod (obsah)*, mohou podle instrukcí modelovat rovinné obrazce s různým obsahem (obvodem).

Žáci vytvoří obrazce z úlohy 3 a 4. Tvary mohu vytvářet pouze tak, že k sobě přikládají shodné strany. Ve skupinách prodiskutují, kolik možných řešení tyto úlohy mají.

Je-li jednotkou obsahu jeden z dvou nejmenších trojúhelníků tangramu – T, zjistí obsah jednotlivých dílků skládačky.

Formulování hypotéz, rozhodování, kontrola a ověření výsledků.

Bonusovým materiálem, na kterém pracují nejlepší žáci samostatně, jsou úlohy 6 a 7 a rozšiřující úloha.

Pro vyučující VŠ

- Vést studenty učitelství k tomu, aby upravili svůj plán hodiny s ohledem na věk, úroveň a specifické potřeby žáků a aby zodpovědně vybírali jednotlivé úlohy atd.
- Poskytovat instrukce a zpětnou vazbu

Závěr

Tento návrh byl vytvořen pro studenty učitelství předmětu matematika pro 2. stupeň (6. – 9. třída základní školy, věk 11 – 15 let nebo nižší gymnázium). Je povinnou součástí předmětu Didaktika matematiky.

Místo konání: Univerzita Mateje Bela, Pedagogická fakulta, Banská Bystrica.

Vyučující na VŠ: tým složený z univerzitních učitelů, 1 vedoucího kurzu, 2 učitelů matematiky a 1 učitele anglického jazyka.

Studenti učitelství: 18 budoucích učitelů v semináři Didaktika matematiky.

<u>*Časové rozvržení – 2 vyučovací hodiny týdně*</u>

Týden	**Aktivity**	
1.	Studenti	připravte tangram – bílý a barevný seznamte se s pravidly práce se skládačkou tangram a použijte je v praxi s použitím pojmové mapy z Přílohy 1 vysvětlete geometrické pojmy – Měření
	Práce na doma	vymyslete motivační úkoly pro určování čtyřúhelníků při práci použijte Internet ve dvojicích vypracujte přípravu hodiny

2.	Studenti	ve dvojicích a skupinách prodiskutujte různé postupy řešení na barevné tabuli ukažte rozdíly vytvořte mapy jazykových pojmů používejte správnou terminologii z různých vyučovacích předmětů (slovenština, fyzika, výtvarná výchova, přírodní vědy, tělesná výchova atd.) proveďte kritický rozbor předvedených příprav na hodinu
	Práce na doma	dokončete přípravu na hodinu s využitím mezipředmětových vztahů proveďte rozbor cílů výuky v přípravě popište jednotlivé kroky a úkoly pro žáky plan
3.	Studenti	projděte přípravy na hodinu připravte závěrečnou diskusi o jednotlivých fázích přípravy na hodinu příprava dvou studentů učitelství, kteří budou vyučovat v reálné škole ostatní studenti komentují a kontrolují + připravují pořízení videozáznamu
	Práce na doma	analýza plánovaných sekvencí připravte vyučovací hodinu pro žáky, kteří nerozuměli materiálům, které jim učitel poskytl
4.	Studenti	studenti a učitel sledují videonahrávku a analyzují hodinu. Soustřeďují se na komunikaci mezi učitelem a žáky. vedoucí kurzu ohodnotí studenty učitelství a poskytne komentář k odvedené tvůrčí práci
	Práce na doma	s použitím tangramu vytvořte vlastní logo, které budete používat s semináři Didaktika matematiky

Realizace navržených sekvencí

Realizace ve výuce

Evangelické gymnasium Banská Bystrica, Skuteckého 5. Gymnázium navštěvují studenti 8 ročníků nižšího a vyššího gymnázia. Kvarta, věk žáků 12/13, počet žáků ve třídě 21. Matematika v anglickém jazyce, geometrie v anglickém jazyce. Dva učitelé – matematiky a anglického jazyka.

Učitelé se při výuce střídali. Student učitelství pořídil videozáznam.

Základní škola Amos v Martine, Východná, 5. třída, střídavá výuka matematiky a přírodních věd. Počet žáků ve třídě 23. Dva vyučující – učitel a student učitelství. Učitel vyučoval. Jiný student učitelství pořídil videozáznam.

Ve třídě

Modelování v rovině (E2) – Učitel motivuje žáky.

Určování čtyřúhelníků.

Postup skládání a rozložení.

Obvod a obsah.

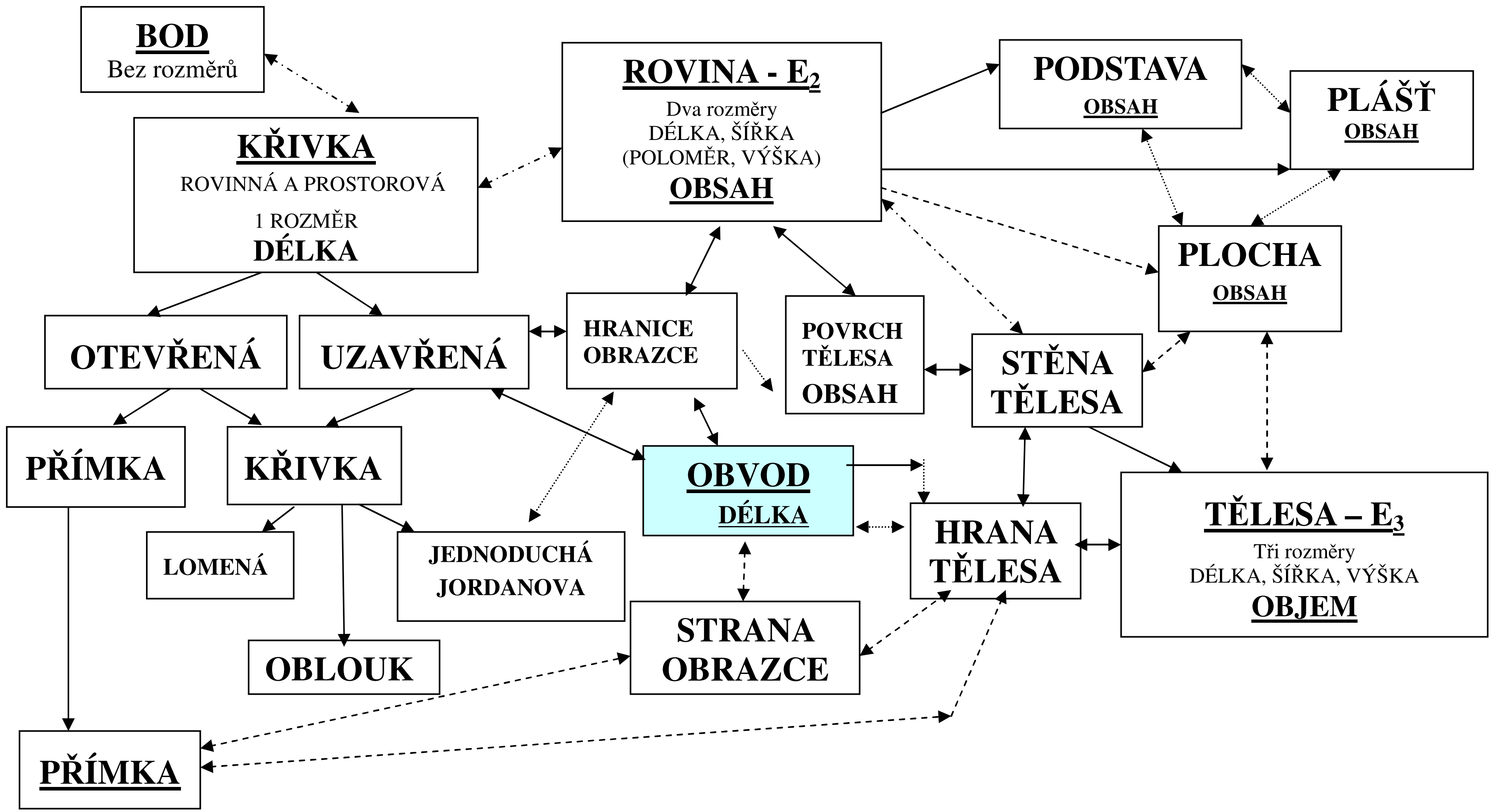
DOPORUČENÁ LITERATURA

Brincková, J. (1996). *Didaktická hra v geometrii*. (Didactical games in geometry). Bratislava: DONY.

Brincková, J. (2001). *Tvorivé dielne 2*. (Zamerané na didaktické hry). Banská Bystrica: PFUMB 2001.

Millington, J. (1998) *Tangram. Puzzle picture to make you think!*. Stockholm.

MAPA termínů - MĚŘENÍ



Druhá pilotáž

Brunetto Piochi[*]

Úkolem pro studenty učitelství je vymodelovat co největší počet tvarů či geometrických obrazců v rovině za použití 7 dílků klasického tangramu (který později sami vytvoří). Poté se zaměří na geometrické vlastnosti (konvexnost, počet vrcholů…) těchto různorodých obrazců a tvarů s cílem objevit obecné vztahy či obrazce určit. Dalším zadáním pro studenty je vymodelovat pravidelné mnohoúhelníky s použitím pouze určitých dílků. U těchto (neshodných) obrazců potom pracují s vlastnostmi obvodu a obsahu.

Podobné úkoly budou následně zadány i žákům a studenti učitelství prodiskutují výsledky tohoto pilotování.

Matematická témata

Návrh se věnuje vlastnostem geometrických obrazců, obzvláště měření obsahu a obvodu a podobnosti.

Cíle

Pro vyučující VŠ

- Usnadnit studentům učitelství přechod od teorie k praxi.
- Nechat studenty učitelství vyzkoušet si úlohu sami na sobě předtím, než ji zadají žákům.
- Poskytovat instrukce a zpětnou vazbu.

Pro studenty učitelství

- Prodiskutovat základní geometrické pojmy i způsob, jak je prezentovat.
- Uvědomit si náročnost definování a pojmenování „geometrického obrazce“.
- Vyzkoušet si úlohu na určování nestandardních obrazců.

Pro středoškolské studenty

- Znát základní názvy a pojmy z oblasti běžných mnohoúhelníků.
- Umět změřit délku úsečky (přímo či v případě potřeby s pomocí Pythagorovy věty).
- Uvědomit si shodnost geometrických obrazců, které je možné rozložit do stejných částí.
- Pracovat s obrazci v rovinně na základě podobnosti a skládání, uvědomit si, že nové obrazce jsou s předchozími shodné.

[*] Dipartimento di Matematica, Università di Firenze, Itálie.

Popis úlohy

Aktivita proběhla v rámci instituce připravující učitele pro střední školy v Itálii (SSIS). Práce se účastnilo 42 posluchačů prvního a druhého ročníku SSIS, kteří chtějí získat kvalifikaci pro výuku matematiky a přírodních věd pro 2. stupeň.

Fáze a časový rozvrh

- Představení tangramu a úlohy s geometrickými obrazci (1 h 30')
- Prodiskutování a vytvoření návrhu, podle kterého bude provedena výuka v reálné třídě (45')
- Pilotování v reálné třídě (v rozsahu 3 až 5 hodin, podle třídy)
- Závěrečná diskuse (30')

SSIS posluchači dostali k vystřižení tangram okopírovaný na lepenku. Poté dostali zadání tří následujících úkolů a společně je okomentovali:

- Vytvořit čtvercovou síť o rozměrech 8 x 8 a do ní zanést souřadnice vrcholů, které je třeba spojit, aby vznikly strany obrazců, které jsou součástí skládačky tangram: (8, 0) a (0, 8); (0, 0) a (4, 4); (8, 4) a (4, 8); (2, 6) a (4, 8); (6, 2) a (6, 6); (4, 4) a (6, 6).
- Vytvořit všechny existující geometrické tvary s použitím čtverce a dvou malých trojúhelníků s tím, že lze k sobě přikládat pouze shodné strany. Vytvořené obrazce dále určit podle počtu vrcholů, obsahu a obvodu.
- Využít všech dílků tangramu k složení známého mnohoúhelníku: trojúhelníku, čtverce, obdélníku.

V diskusi, která následovala po zadání jednotlivých úloh, měli posluchači odpovědět na následující otázky, které je měly nasměrovat k tomu, aby se soustředili na didaktické aspekty úloh:

- Jaké kompetence jsou rozvíjeny v jednotlivých úlohách? Jaké vstupní znalosti se předpokládají? Jaký učební styl je rozvíjen?
- S jakými obtížemi jste se při řešení těchto úloh setkali? Předpokládáte, že žáci by měli při řešení i další potíže? Jak jim můžete pomoci tyto potíže zvládnout?
- Jak můžeme využít tento nástroj ve výuce? Na jakém stupni? Na co je podle Vašeho názoru nejdůležitější se zaměřit?

Později dva posluchači SSIS provedli experiment ve své výuce. Byli vybráni proto, že mohli při experimentu pracovat se žáky, které znali, v rámci standardního učebního plánu. Návrh přípravy na hodinu, který vznikl v přípravné debatě, si tito dva posluchači upravili tak, aby vyhovoval jejich kontextu; experiment proběhl ve čtyřech třídách (celkem asi 80 žáků ve věku 11 a 14); jedna ze tříd úlohy použila pro výuku spolužáků z prvního stupně.

Žáci dostali klasický tangram skládající se ze 7 dílků (buď ve formě k vystřižení, nebo tak, aby dílky sami podle souřadnic narýsovali do čtvercové sítě). Byli vyzváni, aby s použitím dílků vytvářeli různé útvary v rovině (buď zábavné obrázky, nebo geometrické obrazce), poté aby vyslovili hypotézy a tyto hypotézy ověřili. Dále jim bylo zadáno, aby tvořili obrazce z některých konkrétních dílků (v některých případech i ze všech), aby zjišťovali, které z těchto obrazců jsou shodné, aby vyslovovali hypotézy o možné klasifikaci těchto obrazců a aby uvažovali o délce i obvodu takto vytvořených obrazců.

Na závěr informovali ti posluchači, kteří experiment realizovali, o jeho průběhu a vyjádřili se k hypotézám, které byly vysloveny v přípravné debatě. V samém závěru celá skupina vybrala, které z úloh byly obzvláště užitečné a hodí se k dalšímu rozboru.

PREZENTACE

Výuka geometrie na 1. a 2. stupni základní školy je nesmírně důležitá. Nejde jen o sadu naučených termínů z určité oblasti.

Geometrie má klíčový význam při formování racionálního myšlení, protože pomáhá *orientovat se v prostoru* a také prostor *racionálně popsat*.

„Geometrizace" našeho světa je primární matematická činnost, která předchází i základním počtům. Děti mají obvykle tendenci spontánně zprostředkovávat své zážitky pomocí graficko-obrazových aktivit a teprve později začnou věci kolem sebe vyčíslovat. Tato graficko-obrazová činnost znázorňuje i interpretuje naše zkušenosti reálného světa; jde o matematiku, která v určité chvíli poskytuje konkrétní nástroje pro popis skutečných předmětů: přímky, body, obrazce, … .

Geometrie má tedy své kořeny v pozorování jednoduchých předmětů, v manipulaci s nimi, v jejich modelování a znázorňování. Vychází z ohýbání, stříhání, skládání, ze sledování sebe sama i okolního světa v zrcadle… Následná „geometrizace" rozhodně není snadná ani jednoduchá. Vyžaduje velkou míru schopnosti „interpretovat", abychom získali odstup od naivního pohledu a dosáhli komplexního racionálního porozumění. Geometrické myšlení se rozvíjí a utváří na všech stupních v průběhu celé školní docházky. I když v různých fázích převažují konkrétní nebo racionální stránky geometrie, postupně dochází k jejich sbližování a propojování.

Pro ilustraci tohoto tvrzení se budeme věnovat „geometrickým obrazcům". První přístup je práce se (základními a pravidelnými) geometrickými obrazci, popis jejich tvaru a vlastností: to můžeme definovat jako „vizuální" fázi. Tento přístup je charakteristický pro první ročníky 1. stupně (pro žáky ve věku 6 až 8 let). Později už žáci obrazce popisují s pomocí naučených vlastností, jde tedy o „deskriptivní analytickou" fázi. Poté žáci sami vytvářejí definice, hledají charakteristické vlastnosti, musejí argumentovat a dokazovat: zde jde o nejvyšší, abstraktní fázi, která vede k „formální" fázi, kde jsou již možné důkazy vět a studium geometrického axiomatického systému (či spíše axiomatických systémů).

Schopnost práce s obrazci a schopnost je narýsovat je důležitým nástrojem při výuce geometrie: schopnost narýsovat obrazce nám umožňuje vizualizaci jednotlivých vlastností, protože tímto způsobem vlastnosti přenášíme pomocí vztahů v prostoru. Opačný přístup (od grafického znázornění ke geometrickému obrazci) však vychází z aktu interpretace: rozpoznání vizuálních vlastností geometrického objektu v prostoru není spontánní činnost, a proto potřebuje, abychom se jí vědomě naučili. (Geometrický) obrazec může být v různých kontextech vysvětlen mnoha různými způsoby a vnímání přichází teprve po interpretaci: to ovšem může být problém, obzvláště pokud jsou teoretické znalosti pozorujícího omezené a znemožňují mu vidět za hranice běžného vnímání.

Přechod od předmětu ke geometrickému znázornění pomocí určení základních vlastností a od znázornění ke geometrickému objektu pomocí interpretace ukazují, že grafická činnost a její postupné zdokonalování je zároveň důsledkem i zdrojem učení. Díky tomu je například možné poukázat na rozpory v teoretických mylných představách. Jinou možností je ukázat na výhody teorie, která nám umožňuje „předpovídat“ obecné důsledky (shodnost třetí strany dvou trojúhelníků, jejichž dvě strany a úhel, který svírají, jsou stejné …).

Při tomto pojetí vyučování geometrie hrají klíčovou roli takové činnosti, které leží na hranici mezi hrou a grafickou činností a zároveň otevírají pole pro abstraktní matematizaci. Velmi často bohužel dochází ve výuce k tomu, že se tyto propojující činnosti zanedbávají. Právě v kritické chvíli v prvních ročnících 2. stupně je často kladen příliš velký důraz na definice a vzorce odtržené od skutečného života. To vede (často bohužel již definitivně) k zkreslení pohledu na matematiku. Geometrické vlastnosti jsou vnímány jako něco, co vychází z mnemonických znalostí definic a vzorců. Proto je nezbytně nutné, abychom při přípravě budoucích učitelů popsali a vyhodnotili dostatečné množství tohoto typu propojujících úloh.

Pilotovaný návrh používání skládačky tangram patří právě k takovému typu vzdělávacích aktivit.

ÚKOLY PRO POSLUCHAČE SSIS

Všichni posluchači SSIS dostali kopii skládačky tangram na papíře, ze kterého šly jednotlivé dílky snadno vystřihnout2.

V úvodní části jsme se odklonili od postupu slovenských kolegů: vzhledem k nedostatku času jsme vynechali tu část, ve které slovenští studenti z tangramu tvořili libovolné tvary. Upozornili jsme ale naše posluchače, že při této i podobných úlohách, které zahrnují manipulaci, musejí v úvodní části žákům nechat dostatečný prostor pro samostatné zkoumání; tedy nechat žákům čas si „hrát“, prozkoumat rozdíly mezi jednotlivými dílky a použít je pro tvorbu vlastních tvarů.

Poté jsme na fóliích posluchačům ukázali skládačku tangram a sadu tvarů, které se z ní dají složit. Upozornili jsme je, že v praxi by žáci měli pracovat samostatně nebo ve dvojicích a tyto i další tvary sami složit. Tato fáze hodiny se sice z pohledu matematiky může zdát jako zbytečná (tento názor mělo i několik posluchačů SSIS, ale později změnili názor), ale z hlediska motivace je absolutně nezbytná. Navíc žákům umožňuje se dobře s materiálem seznámit a intuitivně prozkoumat potenciál I hranice práce s ním.

[2] Posluchači SSIS také mimo jiné dostali překlad sady cvičení vytvořené kolegy z Banské Bystrice (SK), takže všichni studetni učitelství měli pro diskusi všechny dostupné materially.

Při sledování fólií měli posluchači SSIS říci, zda jim připadá tato úloha pro žáky snadná a zda by byli schopni vymyslet, jak tuto fázi obohatit o matematický obsah (aniž by ale zanedbali herní a motivační prvky). V následné diskusi se posluchači shodli na tom, že jde o snadný úkol, významný z hlediska mezipředmětových vztahů (vztahy s výtvarnou výchovou a pracovním vyučováním), ale z hlediska matematiky v podstatě zbytečný. Domníváme se, že tyto názory souvisejí s tím, na co jsme upozorňovali dříve: navzdory jiným „dílnám“ si posluchači SSIS neuvědomují potenciál vyučování geometrie v činnostech, kde převládá neformální přístup[3].

Zde je vhodné podotknout, že později, v reálném vyučování, tato činnost předcházela samotné práci v geometrii. V závěrečné diskusi posluchači SSIS konstatovali, že žákům připadal tento úkol snadný a zobrazené tvary skládali poměrně bez potíží. Posluchači ale upozornili, že tato činnost vedla k tomu, že si žáci uvědomili celou řadu vlastností obrazců, které učitelé považují za známé. Týkalo se to hlavně dynamických vlastností, které získávají obrazce v rovině (je všeobecně známo, že mnoho žáků si geometrické obrazce vizualizuje staticky), nebo různého uspořádání hranic mezi jednotlivými dílky tangramu, ze kterých se skládá vytvořený tvar: tato hranice může být tvořena bodem nebo úsečkou, může ji tvořit celá strana základního geometrické obrazce nebo pouze její část atd. Práce, při které žáci hledali vhodné definice pro tyto různé situace, vedla k obohacení slovní zásoby v oblasti geometrie a byla dobrým základem pro další fázi. Vzhledem k tomuto poznání je otázkou, zda by nebylo užitečné tuto fázi práce zahrnout do výuky posluchačů SSIS.

Pro aktivitu 1 je třeba mít základní znalosti kartézské roviny (a dále pečlivost a manuální zručnost). Posluchači SSIS s touto úlohou neměli nejmenší problémy, ale předpovídali, že žáci by na problémy narazili, protože nemají dostatečné znalosti kartézské roviny. Pokud by se ukázalo, že nedostatek znalostí z této oblasti je skutečnou obtíží, bylo by podle posluchačů SSIS dobré ukázat jednotlivé dílky tangramu a zadat jen některé souřadnice. V diskusi posluchači také upozornili na to, že z důvodů symetrie a velikosti zvolené čtvercové sítě 8=23 budou mít všechny úhlopříčky dílků tangramu celočíselné souřadnice, přestože mnoho stran má iracionální délku. Z hlediska didaktiky je velmi zajímavé si uvědomit, že k propojení bodů určených souřadnicemi či k určení souřadnic bodů v rovině je potřeba několik kompetencí: tímto způsobem je tedy možné klást různé požadavky na rozvoj těch kompetencí, jež jsou pro určitou skupinu žáků žádoucí.

Aktivita 2 přinesla posluchačům dvě skupiny problémů (což zaskočilo i je samé …): potřebu určit a definovat mechanismus klasifikace dvou shodných obrazců a nemožnost tyto obrazce „pojmenovat“. Právě druhý problém je důkazem toho, že geometrizací často rozumíme pouhé „pojmenovávání“. Je absolutně bez pochyb, že tato úloha byla pro naše posluchače užitečná, protože jim zjednodušila pozdější práci se žáky při „objevování“ nestandardních mnohoúhelníků. Posluchači také upozorňovali na důležitou roli, kterou tato úloha hraje v rozvoji tvůrčích kompetencí

[3] Připomínáme, že posluchači SSIS, kteří se účastnili tohoto projektu, jdou převážně učitelé přírodních věd, nikoli matematiky. Jejich vztah k matematice i chápání této vědy často odpovídá tomu, co cítí jejich žáci.

žáků v rámci celého projektu, neboť jim umožňuje vyzkoušet si autonomní matematické určování. Zároveň jsme se ale dohodli, že tato úloha bude probíhat formou práce ve skupinách, protože nelze předpokládat, že by požadovanými kompetencemi disponoval každý žák v námi diskutované věkové skupině: Práce ve skupině umožňuje výměnu informací, což je pro tuto úlohu výhodou.

Úvaha, která posluchače napadla okamžitě, ale která pravděpodobně nenapadne žáky (to se pak skutečně stalo), je, že není možné obrazce složené ze stejných dílků určovat podle obsahu, a to i přesto, že jde o obrazce shodné, protože se dají rozložit na stejné dílky.

Problémy, které vyvstaly při aktivitě 3, lze v podstatě shrnout do obtíží (známých z celostní psychologie) s rozložením a znovu sestavením vlastních představ, což umožňuje vnímat konkrétní obrazec jako součást jiného obrazce, jehož obraz je v mysli také silný a neměnný. Je zajímavé, že žáci při výuce ve třídě byli při řešení této úlohy mnohem rychlejší a schopnější, pravděpodobně právě proto, že jejich představy o geometrických obrazcích ještě nejsou tak rigidní. Je pravda, že tuto skutečnost předvídala většina posluchačů SSIS. Předpokládali, že žákům tato úloha půjde lépe, protože mají lepší vizuální schopnosti.

REALIZACE EXPERIMENTU VE VÝUCE

Čtyři z posluchačů SSIS se nabídli, že úlohy použijí ve své výuce. Na přesném schématu návrhu se posluchači dohodli v rámci diskuse. Návrh upravili podle potřeb konkrétních tříd i podle tématických plánů. Posluchači, kteří se experimentu účastnili (kmenový učitel a další posluchač), měli soustředit svoji pozornost na problémy, jež vyvstaly v diskusi, a také měli ověřit hypotézy týkající se užitečnosti a náročnosti jednotlivých úloh.

Co bylo společné ve všech třídách, které se experimentu účastnily (také kvůli tomu, že experiment proběhl v únoru), byl malý počet přítomných žáků jako důsledek chřipkové epidemie i dalších zimních mimoškolních aktivit.

Následuje výtah ze závěrečných protokolů posluchačů.

6. ročník, 5 hodin, 12 žáků

[Tangram byl vytvořen s pomocí čtvercové sítě, což umožnilo zopakovat si základní pojmy z oblasti kartézské roviny. Poté učitel nechal žákům volnost si s dílky skládačky hrát.] Jakmile žáci 7 dílků skládačky vystřihli, začali je skládat k sobě, různě natáčet a pokládat, aby vytvářeli obrázky. Byl jsem až udiven, jaké nadšení z nich při této činnosti vyzařovalo. To jsem vůbec nepředpokládal. Nejvíce mě zarazila poznámka: „Tohle je skutečná matematika!“, čímž její autor (podle svého pozdějšího vysvětlení) myslel, že „se zároveň bavíme, hodně přemýšlíme a lámeme si hlavu“.

Pak jsem navrhl, že stanovíme závazná pravidla: dílky se nesmějí překrývat, musejí sousedit stranami a musíme vždy použít VŠECHNY dílky. Chvíli bylo rozpačité ticho], ale pak se u všech lavic začalo s dílky čile pracovat. Svoji chvilku slávy si užila čínská holčička, která do této třídy přišla teprve před dvěma týdny a neuměla italsky. V tichosti obkreslila a vystřihla jednotlivé dílky skládačky a s úsměvem začala vytvářet stále komplikovanější tvary: první ženu, první loďku, … Nemohl a ani jsem nechtěl žáky přerušit až do chvíle, kdy jeden žák složil „lichoběžník, pane učiteli, lichoběžník!" Toho jsem využil: „Ano, a zdá se mi, že můžeme skládat i trojúhelníky, čtverce, obdélníky …". To byla pro žáky nová výzva: a vždy s použitím všech sedmi dílků. K tomuto zkoumání se připojili téměř všichni žáci a obdélník, který jsme my, posluchači SSIS, sestavovali 5 až 6 minut, byl na světě za necelou minutu a půl. Holčičku, která ho složila, jsem požádal, aby ho opatrně něčím zakryla, protože jsem chtěl, aby ho složili i ostatní žáci: netrvalo to ani pět minut a před každým žákem byl složený obdélník.

V této chvíli jsem žákům řekl, aby začali sledovat velikost každého tvaru. Začali jsme u obrazců, které zabírají stejnou plochu. Pak jsme začali přemýšlet o tvarech, které se skládají se stejných dílků a uvědomili si, že přestože jsou dílky umístěny různě a vytvářejí různé obrazce, zůstává pokrytá plocha stále stejná. […] Tato fáze práce se žákům moc líbila, protože každý mohl podle libosti manipulovat s dílky a porovnávat je, dělat chyby a zkoušet to znovu. Zcela jiné otázky zazněly, když žáci dostali za úkol sledovat hranice obrazců, pokládat je na čtverečkovaný papír a měřit jejich obvod: „Jak je možné, že obrazce se stejným obsahem mají tolik různých délek obvodu…?"

6. ročník, 4 hodiny, 16 žáků

Už dříve jsem si všiml, že žáci mívají velké potíže, když si mají vybavit geometrické obrazce mimo kontext vyučovací hodiny geometrie. Někdy se mi stalo i to, že jsem je musel dovést k tomu, aby určili obrazce, které už rýsovali v rámci pracovního vyučování a které měli v mé hodině pouze reprodukovat.

Na začátku hodiny jsem zjistil, že třída, ve které chci experiment realizovat, se skládá hlavně z žáků, kteří se s tangramem seznámili už na 1. stupni. [Přestože práci s tangramem neměli v živé paměti], usoudil jsem, že bude lepší, když budou žáci s tangramem pracovat jinak než minule. Proto jsme se přemístili do počítačové učebny a připojili si na webovou stránku[4] , na které je popsaná hra umožňující ze sedmi dílků tangramu vytvářet obrázky nebo geometrické obrazce. Dílky je možné otáčet (v jednom tahu o 45°), posunovat nebo v případě rovnoběžníku obrátit vzhůru nohama.

Všichni se u toho bavili a zároveň zazněly velmi zajímavé poznámky, jako například:

„to je divné, takhle otáčet geometrické obrazce"

„[rovnoběžník] tam pasuje, když ho obrátím vzhůru nohama, jako by změnil tvar".

Celkově vzato se mi zdálo, že se všichni zapojili a postupně jsme se dostali k tomu, že všechny tvary získáváme ze stejných obrazců díky posunu, otáčení a osové

[4] www.math.it

souměrnosti. Do této aktivity se s velkým zájmem zapojila i autistická žákyně z osmé třídy a překvapivě byla schopna rychle a správně složit většinu tvarů."

7. ročník. 5 hodin, 15 žáků

Všichni rozuměli zadaným úkolům. Dokonce i ti žáci, kteří mívají větší problémy, se samostatně zapojili a byli schopni nalézt správná řešení.

Při první hodině jsem žáky vyzval, aby pracovali s dvěma shodnými rovnoramennými trojúhelníky a vytvořili co největší možný počet různých tvarů, přičemž k sobě směli přikládat pouze shodné strany […] chtěl jsem, aby objevili jak zjistit, zda dva útvary mají stejný obvod či nikoli. Třída přišla s tím, že by obvod mohli měřit pravítkem, ale když zjistili, že délka některých stran je desetinné číslo, rozhodli se použít jinou jednotku měření, tzn. že nejmenší stranu na používaných dílcích označili jako jednotku délky (to jsme probrali společně) a ostatní délky stran určili s pomocí Pythagorovy věty.

Pak jsem se zeptal, zda jsou vytvořené obrazce shodné. Správně odpovědělo jen 10 % žáků. Proto jsme museli zopakovat to, co jsme probrali už dříve. Navrhl jsem jim, aby spočítali počet (papírových) čtverců. Následující týden jsme pracovali se čtvercem a trojúhelníkem a postupovali jsme stejně jako v předchozí hodině. Tentokrát na otázku, zda jde o shodné obrazce a zda mají stejný obvod, odpovědělo správně 85 % žáků.

Za dva dny jsem žáky vyzval, aby s použitím všech dílků tangramu vytvořili obdélník. Chvíli tápali, ale pak objevili dva nebo tři způsoby, jak toho dosáhnout. Zeptal jsem se, zda je vytvořený obdélník a čtverec shodný a zda mají stejný obvod. Tentokrát odpověděli správně všichni žáci.

Obecně lze říci, že tato úloha žáky vedla k tomu, aby svoji odpověď (ať už správnou nebo chybnou) dlouho zvažovali. Měli jsme mnoho řešení, i když nebyla zase až tak moc rozdílná. Je zajímavé, že nikoho nenapadlo „opisovat" od souseda, jako by cítili, že vznikající obrazec je něco osobního. Samozřejmě že spolupracovali, ale funkčně, jak si to vyžadovalo řešení jednotlivých úkolů. Je také zajímavé, že premiantka třídy nebyla schopna úlohu vyřešit [nebyla schopna zjistit obsah jednoho z vytvořených obrazců], protože ji nenapadlo k tomu využít dílky. Později přiznala, že když řeší úlohy z geometrie, náčrty kreslí jen proto, abych byl spokojený já … Jiná žákyně, spíše slabší, úlohu bleskově vyřešila položením trojúhelníku (který si označila obrazec 1) na rovnoběžník (obrazec 2). Zapsala $A_2=2A_1$."

7. ročník, 4 hodiny věnované úvodní fázi + další 4 hodiny na výuku mladších spolužáků, 14 žáků

[Úvodní fáze se velmi podobala tomu, jak se začínalo v 6. ročnících, a to i proto, že třída, která se účastnila výuky spolužáků ze 3. ročníku 1. stupně (ve věku 8 let), byla poměrně slabá. Učitelka doufala, že budou-li žáci muset vysvětlovat některé pojmy mladším spolužákům, budou stimulováni k jejich upevnění v metakognitivní rovině.] Fáze vyučování spolužáků proběhla ve dvou 3. ročnících a to ve dvou samostatných fázích.

V první fázi mladší žáci pod vedením sedmáků nakreslili dílky tangramu o velikosti 8x8 na čtverečkovaný papír s čtverečky o délce stran 1 cm; žáci jednotlivé dílky vystřihli a začali ze všech 7 dílků skládat různé obrazce s tím, že každý složený tvar pojmenovali. V závěru hodiny žáci tyto tvary překreslili do sešitů.

Ve druhé fázi se ve spolupráci s učitelem pracovního vyučování pracovalo „ve velkém“: s „obřím tangramem“ o rozměrech 60 x 60 cm vytvořeném na čtverečkovaném papíru se čtverci 2,5 x 2,5 cm. Dílky tangramu byly nalepeny na lepenku a poté vystřiženy; děti pak byly vyzvány, aby znovu složily tvary z minulé hodiny a podle libosti je vybarvily. Jednotlivé dílky každého tvaru děti přilepily lepící páskou, celý tvar podložily bambusovými tyčemi a tvary pak nosily jako masky.

Na závěr v rámci společné diskuse děti přiznaly, jak překvapené byly, že se z jedné úplně stejné skládačky dá vytvořit tolik odlišných tvarů. Starší spolužáci se mladším pokusili vysvětlit, proč „některé tvary vypadají delší, přestože nemohly vyrůst“ a co se změnilo, když zpočátku mezi tangramy nebyl žádný rozdíl. Mezi věty, které mladší děti uspokojily, vybíráme ty, které podle nás dokazují, že starší žáci pochopili, o co jde, a jsou to schopni verbálně vyjádřit:

„Ty tvary jsou stejně velké jako předtím, ale změnila se poloha jednotlivých dílků.“

„Změnily se dílky bez lepenky, tedy prázdná místa“ (za touto větou se schovává pojem stejného zvětšení, což její autor chápal …).“

SPOLEČNÁ DISKUSE NAD VÝSLEDKY EXPERIMENTU

Poté, co posluchači SSIS, kteří experiment realizovali ve své výuce, seznámili ostatní se svými záznamy, byla zahájena diskuse zaměřená na motivační hodnotu této úlohy (na tom se shodli všichni), především na její potenciál zaujmout i žáky slabé či žáky s malým zájmem o matematiku. Velmi zajímavé byly reakce žáků různých věkových skupin: Posluchači SSIS v úvodní diskusi předpokládali, že starší žáci budou o úlohu projevovat mnohem menší zájem. Tento předpoklad ale experiment nepotvrdil. Jediné, co bylo znát, byl větší zájem mladších studentů o skládání obrázků podle vlastní fantazie. Starší žáci rychleji přešli ke skládání geometrických obrazců.

Všimli jsme si také, jak práce na této úloze přirozeně stimuluje akvizici technik, metod a terminologie týkajících se podobnosti v geometrii. Proto posluchači SSIS navrhli, aby se tato úloha ve vyšších ročnících (po skončení 6. ročníku) používala jako přípravná část pro modul „dílny“ geometrie, který by byl zařazen za výuku mnohoúhelníků. Cílem tohoto modulu by bylo procvičování izometrie a shodnosti (jmenovitě symetrie, otáčení a posunu), ale též rozvoj kompetencí v oblasti vizualizace a určování geometrických obrazců obecně.

NÁVRHY NA DALŠÍ ROZŠÍŘENÍ

V závěru této diskuse padly návrhy dvou dalších rozšiřujících úloh, jednu vytvořil a v praxi vyzkoušel jeden z posluchačů, druhou navrhl jeden z přednášejících v SSIS kurzu:

- Tangram na webu. Zadáte-li slovo tangram do libovolného internetového vyhledávače, zobrazí se vám ohromné množství odkazů na webové stránky, na mnoha z nich najdete výukové aktivity. Zdá se proto, že vhodným úkolem pro posluchače SSIS by bylo z této obrovské nabídky vybrat takové výukové aktivity, které odpovídají věku a schopnostem jejich žáků; pro žáky by takováto úloha mohla mít formu připojení k určitým stránkám, na kterých najdou další informace o tangramech.
- 3-dimenzionální skládačky. Někteří žáci, stejně jako někteří dospělí, mají ohromnou prostorovou představivost a schopnost grafického znázorňování, jiným to činí obrovské potíže. Je také známo, že tyto schopnosti nemusejí být na stejné úrovni jako schopnosti matematické. Někteří žáci mají velké dovednosti ve verbální oblasti a je pro ně snazší zapamatovat si větu jako „těleso s osmi vrcholy“ než si vybavit obrázek; naopak jiní žáci si snadno vybaví krychli, ale počet vrcholů či hran si musejí pokaždé znovu spočítat… Tyto rozdíly v kognitivních stylech vyžadují, abychom všem žákům zadávali úlohy, které spojují prostorovou představivost i slovní popis těles. Tak žákům umožníme propojit tyto dvě dovednosti a také umožníme vyniknout žákům, kteří jsou v počtech či algebře podprůměrní, ale mají jiné přednosti.

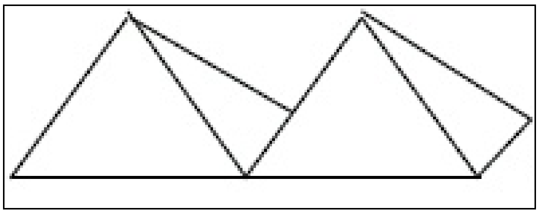
Pro ilustraci tohoto mechanismu byly posluchačům SSIS předloženy následující úlohy:

> A. – *„Představte si čtyřstěn a napište, kolik má stěn, hran a vrcholů. Pak si představte, že čtyřstěn rozložíte. Jak bude v rozloženém stavu v rovině vypadat? Existuje pouze jeden možný tvar?*
>
> *Chlapec vymodeloval těleso z čtverců a rovnostranných trojúhelníků, ale nevíme, z kolika přesně. Víme však, že toto těleso má 5 stěn, 5 vrcholů a 8 hran. O jaké těleso jde?“*

Otázky nebyly doplněny žádnými náčrty. Vše záleželo na prostorové představivosti posluchačů SSIS.

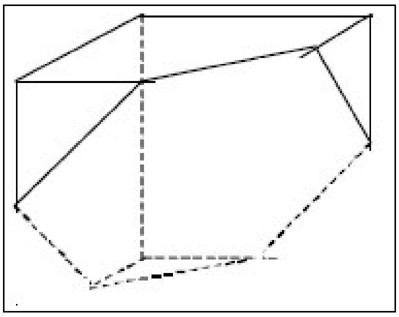
Posluchači SSIS cítili potřebu si ujasnit, že čtyřstěn je jehlan s trojúhelníkovou základnou a čtyřmi stranami („jako iont silikátu křemene“ upozornila jedna posluchačka – absolventka oboru chemie). Toto ujasnění si pojmu jim umožnilo poměrně snadno vyřešit první část úlohy; pak pokračovali v řešení dalších části a pomáhali si při tom „modelováním“ tělesa rukama ve vzduchu.

> B – *„Představte si dva různé jehlany se čtvercovou základnou, jejichž boční stěny tvoří rovnostranné trojúhelníky. Tyto jehlany postavte do roviny tak, aby se dotýkaly pouze jednou hranou základny. Mezi jehlany vznikne prázdný prostor. Dokážete popsat těleso, které by tento prázdný prostor vyplnilo a při spojení s oběma jehlany vytvořilo konvexní těleso?“*



Dva prostorové jehlany

C. – *„Vezměte 3 čtverce o velikosti 10 x 10 a na jedné straně každého odstřihněte pravoúhlý trojúhelník o délce strany 5. Dále vezměte pravidelný šestiúhelník o straně 5$\sqrt{2}$. Těchto 7 dílů k sobě přiložte tak, abyste vytvořili těleso, které vidíte na obrázku. Pokud dvě taktovytvořená tělesa položíte k sobě, jaké těleso vznikne?“*



Vzniklé těleso se sedmi stěnami

Odpovědi na otázky B a C (čtyřstěn a krychle) nejsou intuitivní a takovýto typ úlohy je důkazem našeho dřívějšího tvrzení, že vizualizace v prostoru je náročná; navíc se v tomto kurzu i ve třídách, kde byly úlohy zadány, ukázalo, že někteří posluchači a žáci (někdy překvapivě) jsou schopni vybavit si řešení mnohem dříve a stávají se pro ostatní spolužáky rádci.

D. – *Vezměte jednoduché krychličky (jako dřevěné kostky) a pokuste se z určitého předem daného počtu vytvořit těleso. Pro takto vytvořené těleso potom zakreslete jeho průměty do čtvercové sítě z různých úhlů pohledu (zepředu, shora, zleva, zprava.*

A naopak, znovu sestavte těleso podle takto zakreslených pohledů.“

Je zřejmé, že tato úloha je obtížná kvůli znázorňování různých rovin, z nichž některé nevidíme. To klade velké nároky na naši prostorovou představivost. Předností této úlohy je její propojitelnost s jinými předměty, například pracovním vyučováním či výtvarnou výchovou. Navíc tato úloha slouží jako popis toho, co se nám podaří vytvořit.

DOPORUČENÁ LITERATURA

Gardner, M.(1956). *Mathematics, Magic and Mistery*. Dover Pub.

Kanizsa, G. (1973). *Il ‘problem-solving’ nella psicologia della gestalt*, in Mosconi, G. e D'Urso, V., *La soluzione dei problemi*. Firenze: Giunti-Barbera.

Jaglom, I.M. (1972). *Le isometrie*. Bologna: Zanichelli.

Pellegrino, C. (1999). *Prospettiva: Il punto di vista della Geometria*. Bologna: Pitagora Ed.

UMI-CIIM (2001). Matematica 2001, Materiali per il XXVII Convegno Nazionale sull'Insegnamento della matematica. Lucca: Liceo Scientifico "A. Vallisneri".

Třetí pilotáž (Jihočeská Univerzita, České Budějovice, Česká Republika) a Závěr

Jaroslava Brincková a Iveta Dzúriková

Obecným cílem návrhu Tangram pilotovaného na Slovensku bylo vést studenty učitelství k tomu, aby si uvědomili, jak důležité jsou tvořivé úlohy na měření pro rozvoj žáků v matematice. Skládačku tangram jsme využívali v seminářích pro studenty učitelství v rámci jejich přípravy na výuku geometrie pro věkovou skupinu 11-14 let, tedy pro 2. stupeň základních škol a nižší gymnázia. Hlavním cílem projektu byl rozvoj tvůrčího myšlení a geometrické představivosti žáků s pomocí tangramu. Snažili jsme se vytvořit výukovou aktivitu, která by nám pomohla pracovat s pojmy obvod a obsah v různých kontextech. Tangram jsme chtěli využít také pro studium izometrických transformací při měření a výpočtech obvodu a obsahu.

Zaměřili jsme se na následující dílčí cíle:

- Didaktické vysvětlení posloupnosti kroků při modelování geometrických pojmů obvod a obsah obrazců v rovině: *pozorování – modelování – zobrazování v rovině – měření – odvození funkčních vztahů.*
- Popis van Hielových úrovní geometrického myšlení, obzvláště se zaměřením na odvozování funkčních vztahů s použitím geometrických termínů.
- Modelování ve světě čísel a tvarů s použitím *velikosti úsečky.*
- Hledání vztahů mezi obvodem a obsahem u různých obrazců.

Italští kolegové z Florencie, kteří se podíleli na pilotování projektu Tangram, nám poskytli následující hodnocení (jejich názor na projekt):

Návrh se týká geometrických vlastností obrazců, jmenovitě obvodu a obsahu a podobnosti. Má formu dílny, takže žáci musejí používat pozorovací, manuální a logické dovednosti. Začínají u konkrétních objektů a postupně rozvíjejí své geometrické i grafické kompetence. V závěru úlohy se očekává, že žáci budou

- *znát názvy a pojmy z oblasti základních mnohoúhelníků*
- *umět změřit délku úsečky (přímo, nebo v případě potřeby s pomocí Pythagorovy věty)*
- *uvědomovat si shodnost takových obrazců v rovině, které se dají rozložit na stejných dílky*

- *pracovat s obrazci v rovině s využitím podobnosti a jejich skládání a uvědomit si, že nové obrace jsou shodné s předchozími.*

Naši partneři z České republiky spolupracovali při této pilotáži s další institucí připravující učitele (Jihočeská Univerzita v Českých Budějovicích, pedagogická fakulta, VŠ pedagog Helena Binterová). Poskytli nám následující modifikaci cílů asktivity:

Cílem bylo seznámit budoucí učitele na základních školách s didaktickými možnostmi „tangramu", aby tuto skládačku perspektivně využívali ve vyučování planimetrie a metrické geometrie. Hlavním cílem bylo definovat pojmy, rozvíjet tvůrčí myšlení a geometrickou představivost. Studenti učitelství si také měli uvědomit, jaké didaktické potíže s tím souvisí.

Jedním z povinných zadání pro studenty učitelství bylo dokázat Pythagorovu větu a odůvodnit zvolený postup.

Cíle všech tří účastníků projektu Tangram byly v podstatě identické. Žákům byl umožněn rozvoj geometrické představivosti pomocí didaktické hry. Zároveň si žáci upevnili znalosti v oblastech izomerie a metrické geometrie.

Studenti učitelství byli schopni připravit výuku pro velmi rozdílné třídy. Problém zobrazení v metrické geometrii předem prostudovali v „a priori" analýze. „A posteriori" analýza jim poskytla nový pohled na celou problematiku modelování v geometrii.