TANGRAM I MATEMATIK FOR GRUNDSKOLER

af Jaroslava Brincková og Iveta Dzúriková*

INTRODUKTION

Læring er resultatet af en øvelse og den udvikles også via øvelser. Blandt øvelser, som eleverne ofte udfører, er matematiske spil. Hvis sådanne spil udføres i henhold til regler, som opfylder visse didaktiske mål, bliver de i undervisningssammenhæng kaldet *didaktiske spil*. Disse didaktiske spil omfatter forskellige geometriske puslespil, blandt dem et gammelt kinesisk puslespil kaldet Tangram. I uddannelsesmæssig sammenhæng, hjælper Tangram med undervisningen i geometri via udvikling af:

1. geometrisk viden
2. ræsonnement,
3. geometrisk forestillingsevne.

Geometrisk forestillingsevne er evnen til at opfatte:

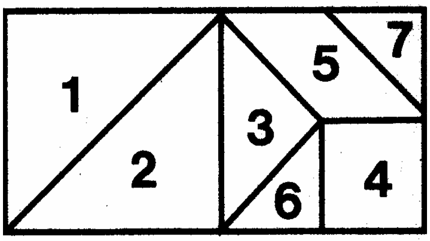
- geometriske former, deres størrelse og placering i rummet,
- en given form i forskellige rumlige positioner,
- ændringer af former i størrelse, struktur, etc.,
- en form i rummet i henhold til dets plane projektion og en beskrivende tekst,
- en plan repræsentation af en given form i rummet.

* Univerzita Mateje Bela, Pedagogická fakulta, Banská Bystrica, Slovakiet.

Hovedafprøvning

af Jaroslava Brincková, Iveta Dzúriková og Miroslav Haviar*

I geometriundervisningen kan udføres forskellige øvelser, som styrker den geometriske forestillingsevne f.eks. modellering via en papir Tangrum i E2 (plan) eller via et Tangram samlesæt I E3 (rumligt).



Figur 1: Tangram

Regler for at anvende Tangram

- Alle syv stykker af Tangram skal bruges, når man danner en form.
- Ingen dele af Tangram må overlappe.
- Alle dele kan benyttes omvendt (oversiden nedad) hvis nødvendigt.

Ved undervisning i geometri kan dele fra et Tangram samlesæt grundlæggende benyttes på to måder:

- *Til at modellere en given foreskreven form* – her kan en konstruktiv forestillingsevne, en opfattelse af geometriske former og deres egenskaber udmærket skabes; et barn opfatter et område.
- *Til at udfylde et givet areal med dele* – her er der tre muligheder:
    - Formen er givet med dets grænser
    - Alle punkter af formen har samme farve - en hel form.
    - Formen er placeret i et kvadratisk gitter.

Ved modellering via en given foruddefineret form, skal eleverne sammenligne grænserne af formen, vælge et tilsvarende stykke af Tangram og anbringe det passende placeret på formen. Eleverne forestiller sig geometriske former, deres størrelse og placering i rummet, samme form på forskellige positioner etc.

Ved udfyldning af et afgrænset område, er der forskellige sværhedsgrader. Som undersøgelser viser, føler eleverne i de laveste klasser ikke det kvadratiske gitter som et værktøj, der hjælper dem i deres arbejde med rektangler, men opfatter det som en tofarvet omgivelse, dvs. som et stykke papir med figurer. De skal gradvist lære at

* Univerzita Mateje Bela, Pedagogická fakulta, Banská Bystrica, Slovakiet.

"opfatte" paralleller og normaler. De opnår de bedste resultater, hvis den givne form er angivet ved dets grænser.

Ved undervisning i geometri på en grundskole, kan Tangram bruges til forskellige motiverende opgaver. I øvelse med arealer, omkreds, aksesymmetri, lighed mellem former, under bevis af Pythagoras læresætning og ved forklaring af rationelle tal. Det bidrager også til i geometri at indøve isometriske transformationer. Det er imidlertid ikke et ideelt værktøj til undervisning i geometriske begreber, da det kun består af én ud af syv typer trekanter (retvinklet ligebenet trekant), af to firkanter (kvadrat og parallelogram) og det indeholder ikke nogen cirkel.

Hoveideen

Betydningen af enkeltfarvet og flerfarvede undervisningsmidler på elevernes effektivitet. Udvikle evnen til at opfatte omkreds og areal af en ikke konveks plan form.

Betydningen af grafiske omgivelser (kvadreret papir, farvet papir, plant hvidt papir) på evnen til at projektere en given model ned på en plantegning. Finde omkredsen og arealet af de forskellige dele i et puslespil.

1. Titel: *Tangram til måling af omkreds og areal*

2. Matematiske emner til udvikling:

Måle plane forme ved brug af en ikke standard måleenhed.

3. Beskrivelse af øvelsen:

Det generelle mål med dette forslag, er at få lærerstuderende til at overveje hvilken betydning, øvelser med målinger kan bibringe elevernes matematiske udvikling. Vi benytter spillet Tangram på kurser for de lærerstuderende under deres forberedelse af undervisning i geometri for elever i alderen 11–14 (dvs. i grundskolen). Hovedformålet er udvikling af kreativ tænkning og geometrisk forestillingsevne hos eleverne. Vi sigter også mod at forberede en øvelse, hvor vi behandler begreberne omkreds og areal i forskellige sammenhænge. Vi ønsker at benytte Tangram til at vise isometrisk transformation ved måling af omkreds og areal.

Vi fokuserer på følgende delmål:

- Didaktisk afklaring af rækkefølgen af trin til at modellere de geometriske udtryk for omkreds og areal af plane former: *opfattelse – modellering - tegne i planet – måling - afledning af funktionelle relationer*.
- Beskrive van Hieles[1] niveauer for geometrisk tankegang, med særlig fokus på udledning af funktionelle relationer ved anvendelse af geometriske udtryk.
- Modellere numre og former ved brug af et liniesegment som enhed.
- Finde relationer mellem omkreds og areal for forskellige former.

- Kun for 14 årige elever: Måle størrelsen af forskellige former og beregne deres omkreds og areal ved hjælp af Pythagoras læresætning eller algebraiske udtryk.

4. Mål:

For elever

- Kombinere brugen af aritmetik, algebra og geometri i givne øvelser
- Bruge Tangram puslespil til at modellere og måle omkreds og areal i plan geometri.
- Lave antagelser, træffe beslutninger, checke og efterprøve resultaterne.

For lærerstuderende

- I matematik: Studere forskellige måleproblemer i geometri. (At modellere relationer mellem tal og former).
- I metodik: Arbejde i grupper - udvikling af didaktisk materiale til fremme af elevernes motivation. Teste materialet i 4 trin:
  - perception, modellering og tegning
  - definition af koncepter og måling
  - procedure for sammensætning
  - adskillelse

For seminarielærere

- Vejlede de studerende i at tilpasse læseplanen og undervisningsmaterialet til elevernes alder, niveau, individuelle behov og ansvarlig for valg af opgaver etc.
- Give instruktion og feedback.

5. Opgaver

For lærerstuderende

Perception, modellering og tegning

Opgave nr. 1: De lærerstuderende bliver bekendt med reglerne i spillet Tangram. De tegner stykker til spillet på papir i henhold til figur 1. De forbereder spillet i to versioner, blank og farvet, sådan at forstå, at i den blanke version er de geometriske former 1 - 7 blanke og i den farvede version benyttes forskellige farver til naboformerne. De skærer formerne for begge versioner ud. De lærerstuderende benytter stykkerne fra de to Tangramversioner hver for sig til at modellere de forskellige Puslespil figurer i figur 2.

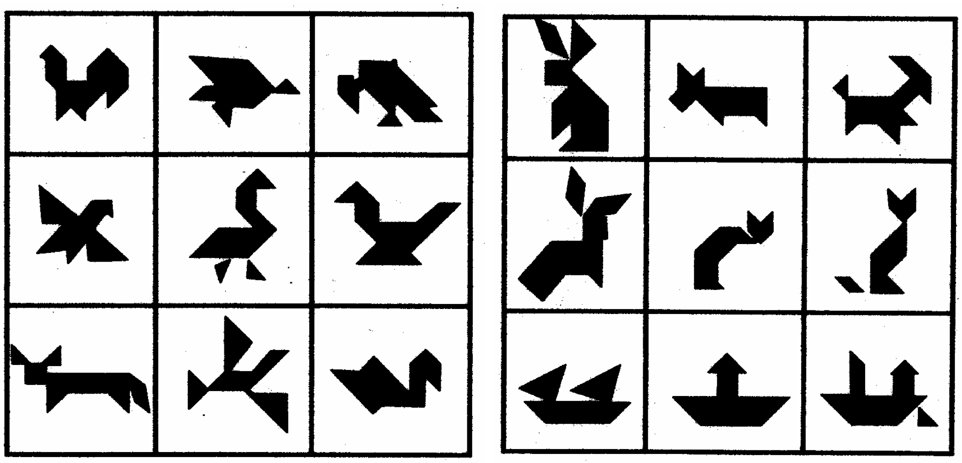
De lærerstuderende benytter alle Tangram dele til at danne de forskellige former i figur 2 samt for andre former f.eks. en pige, en lysestage etc.

De kopierer (tegner i hånden) hver enkelt af de dannede modeller i begge versioner (blank contra farvet) på tre forskellige stykker papir: blank, kvadreret og farvet.

De lærerstuderende diskuterer betydningen af de forskellige baggrunde på papiret samt de forskellige Tangram versioner for elevernes evne til at kopiere den nøjagtige form af puslespillet, som er dannet af Tangram delene.

Derefter diskuterer de lærerstuderende betydningen af de forskellige farvede stykker og evnen til at opfatte omridset af formen. De skal også bemærke den forskellige betydning, Tangram versionerne (blank kontra farvet) har på at opfatte grænselinierne mellem de tegnede figurer.

I næste fase diskuterer de lærerstuderende potentialet af Tangram spillet ved undervisning i klassifikation af firkanter for elever i alderen 11 - 14.



Figur 2: Puslespil billeder

Definition af begreber og måling

Opgave nr. 2: (Se også kort med termer - Måling i bilag 1 eller på hjemmesiden *www.zoznam.sk/katalogy/Vzdelavanie/Slovniky/*). De lærerstuderende finder betydningen af begreberne omkreds og areal i forskellige sammenhænge og i en begrebsordbog. De undersøger begrebet omkreds og areal i forskellige sammenhænge (geografi, litteratur, elektroteknik, luftfart, kunst, geometri,....). Under denne øvelse vil vi at pointere, at omkredsen (arealet) indenfor matematikken bliver forstået som længden af en lukket kurve givet af et (ordnet) par [nummer, mål] og ikke som grænsen (areal) af en plan form.

Procedure sammensætning

Vi kan benytte to enheder, den ene enhed er siden af kvadrat 4 (kald den s), den anden enhed er hypotenusen af trekant 7 *(kald den h).*

Vi viser, at givet en *omkreds (areal),* kan man ifølge instruktionerne lave plane forme med forskelligt areal (omkreds)

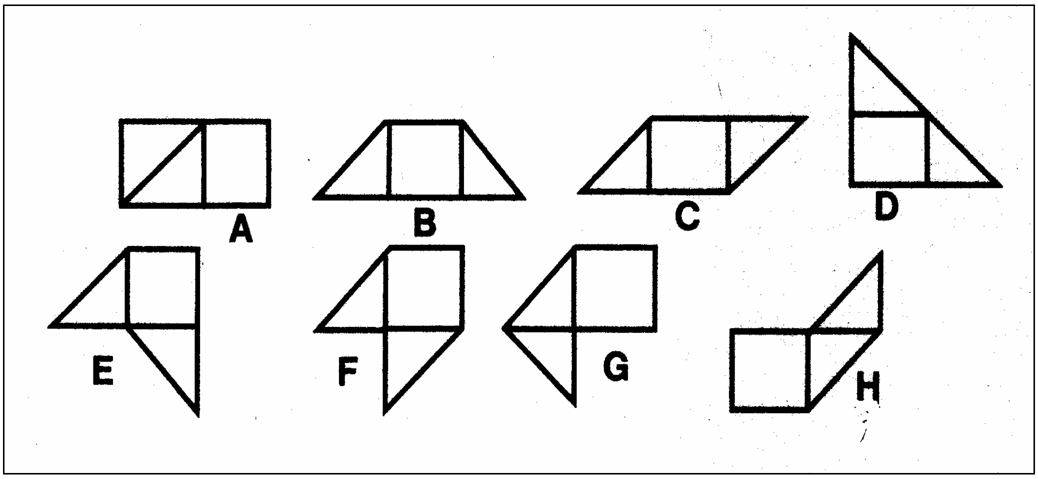
Opgave nr. 3: Modeller plane former af to kongruente Tangram trekanter (dvs. fra enten 1 og 2 eller 6 og 7), så du kan identificere sider med samme længde. Tegn de modellerede løsninger i din øvelsesbog. Udtryk omkredsen af de modellerede former ved hjælp af enhederne s og h.

Opgave nr.4: Lav plane former af Tangram firkant 4 og de to trekanter 6 og 7, så du kan identificere sider med samme længde. Find alle løsninger og klassificer dem i forhold til omkredsen, i forhold til nummeret og størrelsen af vinklerne og i forhold til de parallelle sider.

Ved at sætte formerne sammen, kan eleverne se, at én side af trekanten er længere end siden af firkanten. Så der er muligheder for en interessant og didaktisk frugtbar diskussion - hvad gør vi med dette? Antag, at vi ikke må måle - hvordan klassificerer vi så formerne? Hvilke former har samme omkreds?

Vi kan bruge to enheder - s og h. Så omkredsene er: A er 6s, B er 4s + 2h, C er 4s + 2h, etc. (Faktisk kan man se, at de alle er 4s+2h undtagen form A) Dette motiverer brugen af symboler (s,h) til at løse problemet og fører også til spørgsmålet:

hvad er omkredsen af alle de andre Tangram former?



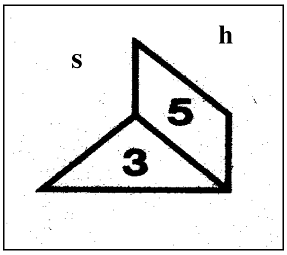
Figur 3: Resultat

Procedure adskillelse

Opgave nr. 5: Studerende sammensætter alle dele af Tangram og danner: a) en trekant, b) et kvadrat, c) et rektangel. Se omhyggeligt efter og find forskelle mellem blanke og farvede puslespil.

Opgave nr. 6: Dan trekanter af 2, 3, 4, 5, 6 og alle dele af det farvede Tangram. Tegn de farvede modeller. Find alle løsninger, som består af fem dele.

Opgave nr. 7: En lille pige Barbara danner en femkant. Kig på billede 4 og dan en ny én af delene med nummer 3 og 5. Hvilke andre Tangram dele har du brug for, for at danne den samme form? En af løsningerne er at bruge delene 4, 6, 7. Find alle andre løsninger.



Fgur 4: Femkant

Areal og omkreds af plane former

Opgave nr.8: Dan alle mulige former af trekanterne 6 og 7. Hvis enheden for Tangram stykkerne er sidelængden af kvadratet s og hypotenusen i trekanterne h, studer så relationerne mellem omkreds og areal.

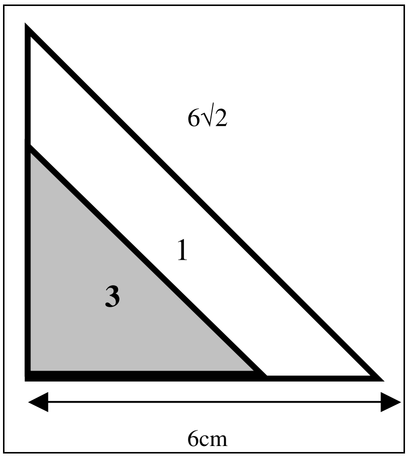
Du behøver ikke at kende højden af trekanterne eller måle arealet for at klassificere formerne. Vi kan bruge en enhed af arealet - T (arealet af trekant 6 eller 7) . Alle former har samme areal - 2T.

Opgave nr. 9: Dan formerne i figur 3 af trekanterne 6 og 7 og Tangram kvadrat 4. Sammenlign deres omkreds og arealer.

Opgave nr. 10: Hvis enheden for arealet er en af de mindste Tangram trekanter - T, find arealet af de forskellige dele i puslespillet.

Special opgave

En dreng, John, sætter den midterste trekant med nummeret 3 på toppen af den store Tangram trekant med nummeret 1 som vist i figur 4. Beregn arealet at det nydannede trapez (farvet blå) ved hjælp af enhederne s og h. (*Skal den være det samme som arealet af trekant 3?*) Udtryk arealet i cm^2: Længden af den korte side af trekant 1 er 6 cm og længden af hypotenusen er $6\sqrt{2}$ cm.



Figur 5: Trekant

For Elever

Eleverne tegner stykker af spillet på papir i henhold til figur 1. De forbereder spillet i to versioner, blank og farvet, hvilket betyder at i den blanke version er alle stykkerne 1 - 7 med de geometriske former blanke og for den farvede version benytter de forskellige farver for naboformerne. De klipper Tangram stykkerne for begge versioner ud. Eleverne bruger Tangram stykkerne fra de to versioner (blank og farvet) hver for sig til at modellere forskellige puslespil billeder som vist i fígur 2 og til at blive fortrolige med reglerne i Tangram spillet

De kopierer (tegner i hånden) hver af de dannede modeller for begge versioner (blank og farvet) på tre forskellige stykker papir: blank, kvadreret og farvet. Derefter diskuterer eleverne betydningen af de forskellige baggrunde på papiret og forskellige versioner af Tangram for evnen til at kopiere den eksakte form at de forskellige puslespil billeder, som er dannet af Tangrams.

Eleverne diskuterer betydningen af de forskellige baggrunde og evnen til at opfatte grænselinierne. De skulle også bemærke den forskellige betydning Tangram versionerne (blank contra farvet) har på at se grænselinierne på de tegnede figurer.

I næste step danne eleverne en kat, en hund, en hare ved at benytte alle Tangram delene og diskutere mulighederne i Tangram spillet til at lære klassifikation af firkanter.

De lærer de matematiske begreber på engelsk: grundlinie, højde, hypotenuse, ret vinkel, vinkelret og (i tilfældet Tangram) ligebenet, og notationer relateret til symmetri som transformation, rotation og spejling.

De forklarer udtrykkene omkreds og areal i forskellige sammenhænge.

De kan bruge to enheder - en enhed er siden af kvadrat 4 (kald den s), den anden enhed er hypotenusen i trekant 7 (kald den h). De finder ud af, at givet en *omkreds* (*areal*), kan man ifølge instruktionerne modellere plane former med forskellige arealer (omkreds).

Eleverne danner modeller fra opgaverne nr. 3 og 4. Dan alle former du kan ved at sætte kongruente sider sammen. De diskuterer i grupper, hvor mange løsninger, der er, til dette problem.

Hvis enheden for areal er den mindste Tangram trekant - T, find arealet af de forskellige dele i puslespillet.

Lav antagelser, træf beslutninger, check og eftervis resultaterne.

Bonus med individuelt arbejde til de bedste elever er opgave nr. 6, 7 og speciel.

For lærere

- Vejlede de studerende i tilpasning af lektionsplanen og undervisningsmaterialet til elevernes alder, niveau, individuelle behov, ansvarlige for valg af opgaver etc.
- Give instruktion og feedback

Feedback

Dette forslag er udarbejdet for lærerstuderende i matematik for 6-9. klasse i grundskolen (11 - 15 år) eller for lavere klasser i forskolen og også som en obligatorisk del af kurset i matematisk didaktik.

Stedet: Pedagogical Faculty, Matej Bel University, Banská Bystrica

Lærerne: Undervisningsteam sammensat af universitetslektorer, 1 vejleder og 2 lærere i matematik og 1 i engelsk.

Studerende: 18 fremtidige lærere i matematisk didaktik

Tidsplan – 2 lektioner pr. Uge

Uge	Aktiviteter	
1.	Studenter	forberede Tangram – blank og farvet lære og bruge reglerne for Tangram puslespil afklare geometriske udtryk ved anvendelse af kortet med termer i bilag 1 - måling (video T)
	Hjemmearbejde	motivation for klassificering af firkanter benyt internettet i din søgning arbejd parvis ved planlægning af lektionen
2.	Studenter	diskuter forskellige løsningsprocedurer parvis og i grupper præsenter forskellene på farvetavlen dan kort med de sproglige termer anvend korrekt terminologi i de enkelte fag (Slovakisk, fysik, kunst, naturvidenskab, spil, etc.) lav en kritisk analyse af præsentationerne af lektionsplaner
	Hjemmearbejde	færdiggøre lektionsplanen ved hjælp af tværfaglige relationer opstille mål med undervisningen skrive undervisningstrin og opgaver for eleverne i lektionsplanen
3.	Studenter	check din lektionsplan forbered afsluttende diskussion om lektionsplanens sekvenser forberedelse af 2 studerende, som skal undervise i klassen øvrige studerende kommenterer og checker + forbereder videooptagelse
	Hjemmearbejde	analyse af de planlagte sekvenser forberede en lektion for elever, som ikke forstod lærernes materiale

4.	Studenter	studerende og lærer ser videooptagelse og analyserer lektionen med fokus på kommunikationen mellem lærer og elev læreren giver en vurdering af de studerende og kommenterer deres kreative arbejde
	Hjemmearbejde	dan dit eget symbol for kurset didaktisk matematik ved hjælp af Tangram

Gennemførelse af de foreslåede sekvenser

Gennemførelse i klassen

Evangelisk Gymnasium Banská Bystrica, Skuteckého 5. Den består af 8 klasser forskole og grundskole, 4. klasse, elevernes alder 12/13, antal elever 21. Matematik på engelsk, geometri på engelsk. To lærere - engelsk og matematik.

Lærerne underviste skiftevis. Studerende fra kurset optog en video.

Grundskole Amos i Martin, Východná, 5. klasse, skiftevis undervisning i matematik og naturvidenskab. Antal elever 23. To lærere - lærer og studerende. En lærer underviste. De studerende optog en video.

I klassen

Modellering i planet (E2) – Læreren motiverer eleverne.

Klassifikation af firkanterne.

Procedure for sammensætning og adskillelse.

Omkreds og areal.

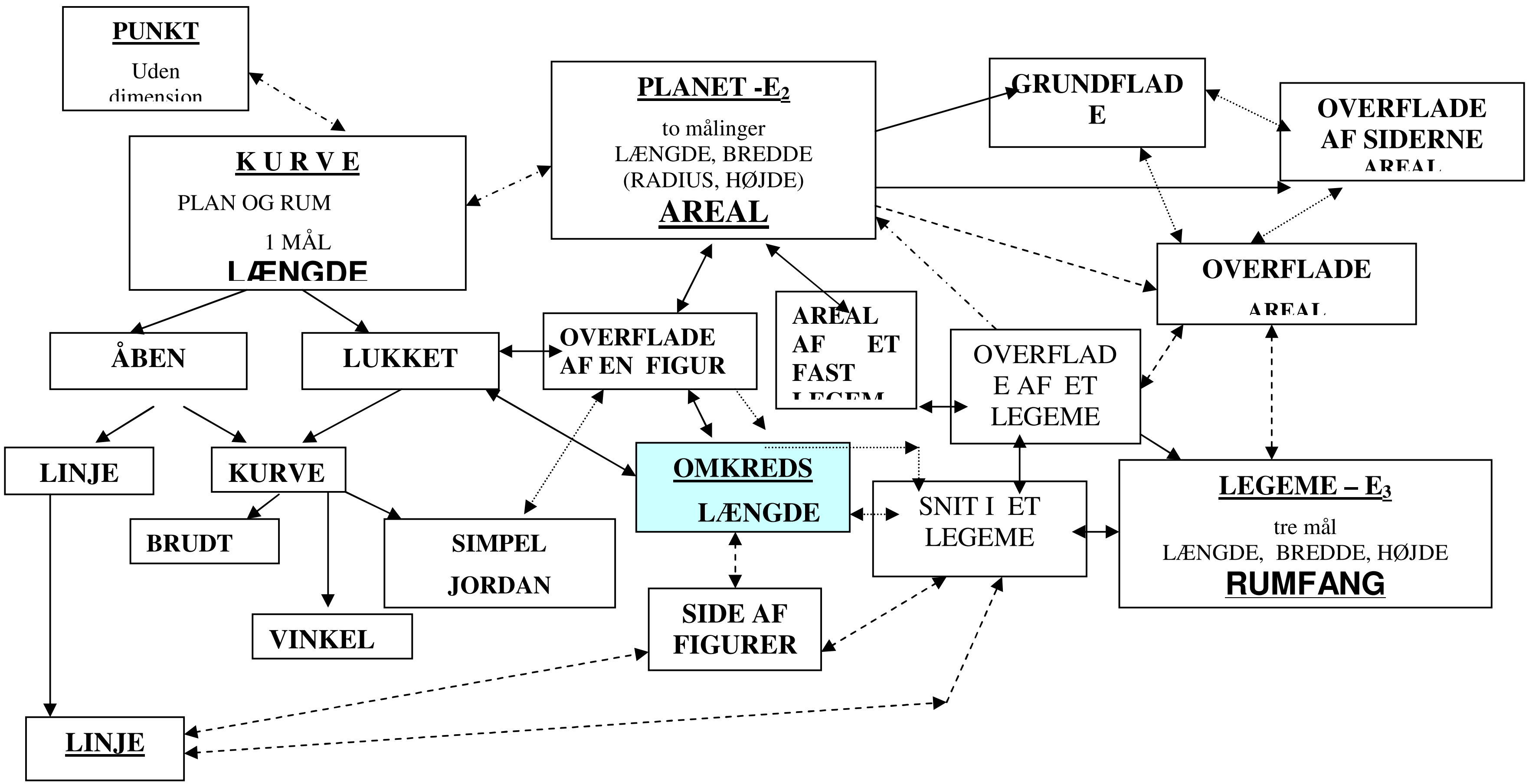
LITTERATUR

Brincková, J. (1996) *Didaktická hra v geometrii*. (Didactical games in geometry). Bratislava: DONY

Brincková, J. (2001) *Tvorivé dielne 2* (Zamerané na didaktické hry). Banská Bystrica: PFUMB

Millington, J.: *Tangram. Puzzle picture to make you think*!

OVERSIGT over udtryk - MÅLING



Andet forløb

af Brunetto Piochi*

De studerende skal fremstille så mange forskellige plane tegninger eller plane geometriske figurer, de kan, ved hjælp af et klassisk 7-dele Tangram (eventuelt fremstillet af dem selv). De skal så kigge på geometriske egenskaber (konveksitet, antallet af toppunkter....) for sådanne forskellige former for at finde generelle relationer eller klassificere dem. De bliver særskilt bedt om kun at bruge nogle bestemte stykker til at prøve at konstruere regulære polygoner. Areal og omkreds for de fremstillede (ikke kongruente) figurer skal også betragtes.

Lignende øvelser skal gennemføres med eleverne og resultaterne af deres forløb skal efterfølgende diskuteres med de øvrige studerende.

Matematiske emner

Forslaget er relateret til geometriske egenskaber for tegninger, i særdeleshed til mål for areal og omkreds og til isometriske transformationer.

Mål

For lærere

- Vejlede studerende fra teori til praksis
- Lade de studerende opleve en øvelse på sig selv, inden de stiller den til eleverne
- Give instruktioner og feedback

For lærerstudernde

- Diskutere grundlæggende begreber indenfor geometri, og hvordan man skal præsentere dem
- Forstå besværet med at definere og navngive en "geometrisk figur"
- Opleve en klassificeringsøvelse på ikke standardiserede figurer.

For elever

- Kende de grundlæggende navne og begreber for nogle almindelige polygoner
- Blive i stand til at måle længden af et segment (direkte eller, hvis nødvendigt, ved hjælp af Pythagoras læresætning)

* Dipartimento di Matematica, Università di Firenze, Italien.

- Forstå ækvivalensen mellem plane figurer, som kan sammensættes af de samme dele
- Arbejde med plane figurer ved hjælp af isometriske transformationer og deres sammensætning, og forstå, at nye figurer er kongruente med de hidtidige.

Beskrivelse af øvelsen

Øvelsen blev gennemført på SSIS skolen og involverede 42 studerende, både første års og anden års studerende med speciale i naturvidenskab, og som skulle opnå kvalifikationer i undervisning af matematik og naturvidenskab i grundskolen.

Faser og tidsplan

- Præsentation af Tangram og øvelser med geometriske figurer (1,5 t)
- Diskussion og udarbejdelse af et forslag til gennemførelse i en klasse (45 min)
- Forsøgsundervisning i klassen (mellem 3 og 5 timer, afhængig af klasserne)
- Afsluttende diskussion (30 min)

De SSIS studerende fik udleveret karton kopier af et Tangram, som skulle klippes ud. De tre følgende øvelser blev foreslået og derefter kommenteret i fællesskab:

- Lav et 8x8 kvadratisk gitter, på hvilket du kan angive koordinaterne af toppunkterne, som skal forbindes for at danne siderne af figurerne, der udgør Tangram puslespillet: (8,0) og (0.8); (0,0) og (4,4); (8,4) og (4,8); (2,6) og (4,8); (6,2) og (6,6); (4,4) og (6,6).
- Dan alle mulige geometriske former ved at bruge firkanten og de to små trekanter, sæt de kongruente sider ved siden af hinanden. De dannede figurer skal klassificeres i forhold til antallet af toppunkter, areal og omkreds.
- Brug alle Tangram delene til at konstruere en kendt polygon: trekant, firkant, rektangel

I diskussionen, som fulgte øvelserne, blev de studerende anmodet om, hovedsagelig med fokus på de didaktiske aspekter i øvelsen, at besvare følgende spørgsmål:

- Hvilke kompetencer er involveret i denne type øvelse? Hvilke forkundskaber er nødvendige? Hvilken type læring bliver fremmet?
- Hvilke vanskeligheder stødte du på i denne øvelse? Tror du eleverne vil møde yderligere vanskeligheder? Hvordan kan de hjælpes til at overvinde disse?
- Hvordan kan vi udforme en klasseøvelse med dette værktøj? På hvilket undervisningsniveau? Hvad er, efter din mening, det vigtigste at fokusere på?

Senere udførte to studerende, som allerede underviste, et klasseundervisnings eksperiment: Dette blev valgt på grund af, at de kunne arbejde i kendte klasser og indføje øvelsen i klassens standard pensum. Forslaget, hovedsagelig skitseret under den indledende diskussion, blev overtaget af de studerende og tilpasset deres egen undervisningssituation. Eksperimentet blev gennemført i fire klasser (totalt omkring 80 elever mellem 11 og 14 år). En af de studerende anvendte det som en enkeltundervisningsøvelse med en grundskoleklasse.

Eleverne fik udleveret et klassisk firkantet Tangram bestående af 7 dele (enten til at klippe ud eller konstruere på et koordinatsystem). De blev bedt om at konstruere forskellige plane figurer (enten fantasifulde eller geometriske) ved hjælp af delene, og derefter lave hypoteser og eftervise disse. De blev ekstra bedt om at konstruere figurer med nogle givne dele (i nogle tilfælde alle delene), identificere hvilke figurer der er kongruente, lave antagelser om mulige klassifikationer og reflektere over både udstrækning og omkreds af de på denne måde konstruerede figurer.

Til slut rapporterede de to eksperimenterende studerende om øvelsen til de andre med kommentarer til hypoteserne fra den indledende diskussion. Til slut fremkom hele gruppen med nogle særlig betydningsfulde øvelser til yderligere analyse.

PRÆSENTATION

Geometrilæring er særlig vigtig, specielt i for- og grundskolen, ud over den rene læring af begreber relateret til et specifikt tema.

Geometri spiller en afgørende rolle i dannelse af rational tænkning både som *rumlig organisator* og ved fremstilling af *rationelle beskrivelser* af rumlige begreber.

"Geometrisering", vores erfaringer af verden omkring os er en primær matematisk øvelse, som går forud for den betydende øvelse. Børn har hovedsagelig og spontant en tendens til at repræsentere deres erfaringer gennem grafiske-billedlige øvelser, før de opregner objekter omkring dem. Denne grafisk-billedlige øvelse har en tendens til både at repræsentere og interpretere vores opfattelse af virkeligheden. Det er matematikken, som i nogen grad giver specifikke instrumenter til at beskrive disse reelle objekter: linier, punkter, figurer,..

Geometri udspringer således af observation, manipulation, konstruktion og repræsentation af simple objekter, fra foldning, skæring, sammensætning, fra at kigge både på sig selv og alt omkring i spejlet... Den efterfølgende "geometrisering" er hverken nem eller simpel, den kræver evnen til at "interpretere", som får os til at afvige fra et naivt syn til at få en mere kompleks forståelse. Geometrisk tænkning udvikles gennem hele skolelivet og omfatter forskellig lærings- og undervisningsniveauer, sammensmeltede konkrete og rationelle aspekter af geometri, selv om den første eller den sidste har overvægt på forskellige tidspunkter i skoleforløbet.

Lad os betragte de "geometriske figurer" for at eksemplificere dette punkt. Den første tilgang er at arbejde med (elementære og regulære) geometriske figurer, beskrive deres form og egenskaber. Dette kan defineres som det "visuelle" niveau. Denne tilgang karakteriserer normalt de første år af forskolen (6 til 8 år gamle elever).

Senere bevæger vi os videre til genkendelse og beskrivelse af figurerne ud fra lærte egenskaber på et "beskrivende analytisk" niveau. Dernæst konstruerer eleverne definitioner, kigger efter karakteriserende egenskaber og behovet for at argumentere og bevise: Dette er det højeste og mest abstrakte niveau, som fører til den "formelle" eneste forestillelige bevis af læresætninger og studiet af et geometrisk aksiomatisk system (eller snarere aksiomatiske systemer).

At være i stand til at arbejde med figurer og tegne dem bliver vigtige instrumenter i geometriundervisningen: Ved at tegne figurer er man i stand til at visualisere særpræg og egenskaber, fordi geometriske objekters egenskaber bliver oversat grafisk ved hjælp af rumlige forhold. Den modsatte retning, som fører fra tegningen til det geometriske objekt derimod, kommer fra menneskets subjektive opfattelse: genkendelse af visuelle rumlige egenskaber tillagt geometriske egenskaber er ikke en spontan øvelse og behøver derfor en rigtig læringsproces. En (geometrisk) tegning kan opfattes på mange måder i forskellige sammenhænge, og opfattelsen dannes, når en interpretation er konstrueret. Dette er måske ikke korrekt, især når læserens teoretiske viden er begrænset og gør, at han/hun ikke kan bevæge sig videre end til opfattende læsning.

At bevæge sig fra objektet til geometrisk tegning ved at identificere særpræg og fra tegning til geometrisk objekt ved hjælp af interpretationer viser, hvordan grafiske øvelser og dets gradvise forfinelse er både en konsekvens og en kilde til læring. For eksempel er det gennem dem muligt at fremhæve modsigelser i teoretiske misforståelser (det er yderst svært at få højderne i en trekant, som følger firkantens kanter til at mødes nøjagtigt ...) eller fordelene ved en teori, som lader os "forudsige" generelle konsekvenser (lighed mellem den tredje side af to trekanter, som har to sider og vinklen mellem dem lige store ...).

Indenfor denne del af geometriundervisningen er de øvelser, der er opstillet som grænselinie øvelser, yderst relevante. Det bliver gjort som en leg og giver samtidig grafiske aspekter og dermed muligheder for en abstrakt matematisering. For ofte springer matematikundervisningen over disse overgangsøjeblikke og det mest elegante tidspunkt er netop i begyndelsen af forskolen, når insisteren på definitioner og formler adskilt fra en konkret sammenhæng bidrager til en (ofte definitiv) forstyrrelse af opfattelsen af matematik. Geometriske aspekter betragtes og opfattes som defineret af en mnemoteknisk kendskab til definitioner og formler. Det synes derfor nødvendigt at bruge nok opmærksomhed på beskrivelsen og evalueringen af denne type øvelser i uddannelsen af lærere.

Forslaget om anvendelsen af Tangram, som vi lavede et forløb med, ligger indenfor denne undervisningsmæssige linie.

ØVELSER MED STUDERENDE

Alle SSIS studerende fik udleveret en kopi på papir af et Tangram puslespil, som det var nemt at klippe ud[1].

I den indledende del af øvelsen afveg vi fra den fremgangsmåde, der var foreslået af de slovakiske kolleger: På grund af tidsbegrænsninger undgik vi, at SSIS studerende arbejdede med konstruktion af frie figurer. De studerende blev dog gjort opmærksom på, at i denne øvelse såvel som i alle andre operationelle eller laboratorielignende øvelser, bør den indledende fase omfatte fri udforskning. Derfor behovet for at give eleverne lidt tid til at "lege", til at udforske de forskellige dele og til at prøve at bruge dem til forskellige kreative ting.

Vi startede så øvelsen med de SSIS studerende ved at præsentere et Tangram puslespil på overhead og nogle figurer, som kunne laves med det. Det blev påpeget, at det var ønskeligt, at eleverne blev opmuntret til at arbejde enten individuelt eller i små grupper med at konstruere disse figurer eller opfinde deres egne. Denne fase kunne indledningsvis synes ubrugelig set fra et matematisk synspunkt (mange studerende delte denne opfattelse, dog ændrede de denne opfattelse senere), men det er afgørende rent motivationsmæssigt, at lade eleverne komme i berøring med materialet og udforske dets begrænsninger og potentialer rent intuitivt.

Imens de SSIS studerende kiggede på de præsenterede overheads, blev de spurgt om de mente, denne øvelse ville være nem for deres elever, og hvordan de kunne forestille sig et matematisk uddannelsesaspekt i denne fase af øvelsen (husk altid på "læring som en leg" og de motiverende aspekter). I den følgende diskussion var der få og samstemmende indvendinger: Øvelsen er nem, relevant for tværfaglige emner (med kunst og teknisk uddannelse), men næppe betydningsfuld ud fra et matematisk synspunkt. Vi tror, at denne forvirring viser det forstyrrede syn på den disciplin vi refererede til tidligere: Trods tidligere laboratorielignende eksperimenter, ser de studerende næsten ikke potentialet i geometrisk læring med øvelser, hvor en uformel tilgang er foretrukket [2].

Det er interessant at se, at i klasseøvelsen senere, blev denne fase behandlet inden det virkelige geometriske arbejde. I den afsluttende diskussion bemærkede de, at eleverne fandt øvelsen relativ nem og let kunne lave de foreslåede figurer. De studerende selv påpegede imidlertid, hvordan denne øvelse bidrog til at fremhæve en række "egenskaber" ved figurerne, som lærerne har en tendens til at tage for givet, især de egenskaber, der relaterer sig til den dynamiske placering af figurerne i planet (det er velkendt, at mange elever har en tendens til at visualisere geometriske figurer på en

[1] De studerende fik blandt andre ting også udleveret skemaet til en opgave udarbejdet af kolleger fra Banska Bristica (SK), naturligvis oversat, så hver studerende kunne have alt materiale klar til diskussion.

[2] Vi minder om, at de involverede studerende i denne øvelse hovedsagelig er naturvidenskabeligt uddannede, men ikke matematik uddannede. Ofte er deres forhold til og opfattelse af matematik ikke meget anderledes end elevernes .

statisk måde), eller til de forskellige konfigurationer af grænselinien mellem Tangram former, som kommer til at udgøre de forskellige dele af en sammensat figur: Denne grænselinie kan være et punkt eller et segment, som kan inkludere en del af eller hele siden af en elementær form etc. Arbejdet i klassen med at finde lingvistiske definitioner af disse situationer førte til en berigelse i den geometriske gloseliste og dannede basis for næste fase. I lyset af disse bemærkninger synes det som om, det vil være godt også at inkludere denne fase i SSIS uddannelsesøvelserne.

SSIS studerende blev præsenteret for de tre følgende øvelser, som de kommenterede i fællesskab:

Øvelse 1 kræver selvfølgelig kendskab til koordinatsystemer (sammen med præcision og håndelag). De studerende mødte ikke nogen nævneværdige vanskeligheder med det, men de formodede deres elever ville møde nogle, da de ikke havde alle nødvendige forkundskaber vedr. koordinatsystemer. I tilfælde af, at eleverne havde disse forkundskaber, foreslog de studerende, at eleverne fik vist Tangram formen og derefter kun fik nogle af koordinaterne. Under diskussionen blev det påpeget, at af symmetrigrunde og på grund af den valgte gitterstørrelse på $8=2^3$, har alle toppunkter i Tangram delene lige koordinater, skønt mange segmenter har en irrationel længde. Ud fra et didaktisk synspunkt var det interessant at bemærke, at der kræves forskellige kompetencer til at forbinde punkter med givne koordinater eller angive koordinater til punkter i planet: På den måde er det muligt at konstruere forskellige spørgsmål, passende til at forstærke eller fremme forskellige kompetencer afhængig af elevernes behov.

Øvelse 2 har to typer af vanskeligheder (til overraskelse for de studerende selv ---): Behovet for at identificere og definere en mekanisme til klassifikation, som identificerer to kongruente figurer og umuligheden af at "navngive" alle figurerne. Det sidste punkt understreger især opfattelsen af, at geometrisering alt for ofte er synonym med "navngivning". Øvelsen var bestemt anvendelig for uddannelse af lærerstuderende, for så snart de kommer i klassen, kan de håndtere elevernes "opdagelse" af ikke standard polygoner med større lethed. De studerende påpegede også relevansen i dette forslag til at fremme de kreative kompetencer hos de elever, som bliver bedt om at opleve en slags autonom matematisk klassifikation. Vi besluttede imidlertid at præsentere øvelsen som en gruppeøvelse, eftersom de efterspurgte kompetencer muligvis ikke er tilstede hos hver enkelt elev på den alder. En gruppeøvelse vil gøre det muligt at udveksle alle mulige fordele heraf.

En overvejelse, som opstod straks hos de studerende, men som måske ikke vil opstå hos eleverne (og faktisk ikke opstod), var, at det ikke er muligt at klassificere de konstruerede figurer ud fra arealet med de samme dele, da det er givet at disse figurer er ækvivalente og dermed lige adskillelige.

Vanskelighederne i øvelse 3 kan hovedsagelig reduceres til vanskeligheder (velkendte i gestalt psykologien) med destrukturering og restrukturering af ens opfattelse ved visualisering af en given figur, som er en del af en anden, og hvis struktur i vores hukommelse er stærk og rigid. Vi vil her bemærke, at i klasseøvelsen var eleverne meget hurtigere og dygtigere til at gennemføre øvelserne, måske på grund af en mindre rigid opbygning af de geometriske figurer, de husker i hukommelsen. Dette blev forudset af de fleste SSIS studerende, som havde forventet, at eleverne ville være mere kapable til øvelsen på grund af en større forestillingsevne og visuel kapacitet.

KLASSEEKSPERIMENTER

Fire SSIS studerende meldte sig frivilligt til at præsentere øvelsen i deres klasser. Forslaget blev vedtaget under en kollektiv diskussion, hvor man tilpassede det til de forskellige klasser og de aktuelle undervisningsplaner. De studerende, som var involveret i eksperimentet (klasselæreren og en anden studerende) blev bedt om at være opmærksomme på de punkter, der blev påpeget under diskussionen samt teste hypoteserne om vanskeligheder, og hvor betydningsfuld øvelsen var.

Et punkt, som var fælles for alle eksperimenter, var (også fordi øvelserne blev gennemført i februar), at alle involverede klasser talte få elever på grund af influenza og vinter ekstra-skole øvelser.

Her følger uddrag fra de studerendes endelige rapporter

6. klasse, 5 timers arbejde, 12 elever

[Tangram blev lavet ud fra et koordinat system, en konstruktion som muliggjorde en repetition af begreberne for koordinatsystemer. Derefter overlod læreren eleverne til frit at lege med delene]. Så snart de havde klippet de syv dele ud, begyndte de at lege med dem, vende dem om, sætte dem sammen til figurer på en så entusiastisk måde, som jeg slet ikke havde regnet med. Den mest forbløffende kommentar var "Dette er virkelig matematik!" hvilket betød, som dets ophavsmand senere forklarede, at "vi har det sjovt og tænker en masse og bryder vores hjerner samtidig".

[Så forventede jeg, at reglerne var fastsatte for alle og skulle overholdes; vi måtte ikke overlappe dele, dele skulle lægges side mod side, altid bruge ALLE dele. Efter et øjebliks tvivl] begynder dele at gå rundt blandt alle borde. Et øjebliks glorie blev tildelt den kinesiske pige, som kom til klassen for 2 uger siden uden at kende nogen italienere, og som efter at have kopieret og klippet skemaet ud i stilhed, begyndte leende at lave mere og mere komplicerede figurer: den første kvinde, den første båd, ... Jeg kunne og ønskede ikke at afbryde dem før en dreng konstruerede "et trapez, hr., et trapez". Jeg benyttede lejligheden: "Åh ja, og jeg tror også vi kan konstruere firkanter, trekanter, rektangler ....". Det var en ny udfordring: Altid med syv dele. Næsten alle eleverne var optaget af søgningen og det rektangel, som vi SSIS studerende fandt på 5 til 6 minutter, var fundet på mindre end halvanden minut. Jeg checkede det diskret og bad pigen, som havde lavet det om at dække det til, fordi jeg ønskede at se, hvad de andre gjorde: På mindre end 5 minutter havde hver enkelt elev konstrueret sit eget rektangel.

Startende herfra bad jeg dem observere og overveje, hvordan hver enkelt figur kunne udvides. Begyndende med figurer, som optager samme overflade, bevægede vi os til at tænke på dem som lavet af de samme dele, og, selvom de blev flyttet rundt, var de stadig de samme, og dannede forskellige figurer, som ikke desto mindre optog den samme overflade [...] Eleverne kunne meget godt lide denne del, fordi enhver kunne manipulere og sammenligne dele, som de havde lyst til. Hvis det var forkert, kunne de prøve igen. Andre overvejelser opstod, når de skulle betragte figurernes grænser efter, at have sat dem op på kvadreret papir for at måle deres omkreds: Hvordan kan det være, at vi får det samme areal, men så forskellige grænser i nogle figurer og ikke i andre...?"

6. klasse, 4 timers arbejde, 16 elever involveret

Jeg havde faktisk tidligere observeret, at elever ofte møder vanskeligheder ved at forestille sig geometriske figurer udenfor lektionens lærebogs-geometri. I nogle tilfælde måtte jeg lede dem til at genkende figurer, de allerede havde tegnet under deres tekniske uddannelse, og som de kun skulle gengive for geometriklassen.

Øvelsen blev hovedsagelig gennemført i en klasse med elever fra samme forskoleklasse, som allerede havde arbejdet med Tangram, hvilket jeg erfarede i starten af lektionen. [Skønt deres hukommelse var lidt uklar]. Jeg tænkte, det ville være bedre ikke at lade eleverne arbejde på samme måde, som de gjorde i forskolen, så vi flyttede til computer laboratoriet, hvor vi gik ind på et website4, som præsenterede et spil, hvor eleverne kunne spille med Tangrams syv dele til at genskabe enten fantasifulde eller geometriske figurer. Delene kan roteres (45° ad gangen) transformeres eller, kun i tilfældet parallelogram, vendes om. Øvelsen var sjov for alle og gav anledning til interessante kommentarer som f.eks.:

"Det er unaturligt for geometriske figurer at blive vendt om"

"[parallelogram] det passer, hvis jeg vender den om, det er som om den ændrede form".

Generelt havde jeg opfattelsen af, at alle var engagerede. Og vi bemærkede progressivt, at alle figurer blev dannet ud fra de samme moduler ved hjælp af transformation, rotation, vende om uden ødelæggelse. En autistisk 8. klasses elev af mine egne elever deltog også i øvelsen, og hun kunne på overraskende vis gennemføre det meste af spillet korrekt og hurtigt."

7. Klasse, 5 timer, 15 elever

E stillede spørgsmål blev forstået af alle. Også dem der møder flere vanskeligheder i klassearbejdet deltog autonomt og fandt ofte korrekte løsninger.

I den første lektion blev eleverne bedt om at bruge de to ens ligebenede trekanter, sætte de kongruente sider mod hinanden for at få det størst mulige antal forskellige former [...] Jeg bad dem overveje, hvordan man kan checke, om figurerne havde lige stor omkreds eller ikke. Klassen troede den kunne bruge en lineal til at måle sidernes længde, men da de fandt ud af, at nogle dimensioner blev udtrykt i decimaler, besluttede de at antage en arbitrær værdi som måleenhed, dvs. de tillagde den mindste dimension enheds-værdien (vi talte om det sammen), og ved at bruge Pythagoras læresætning fandt de de andre længder.

Jeg spurgte så, om figurerne var ækvivalente. Kun 10% af eleverne svarede rigtigt, så jeg måtte gentage det, jeg havde gjort før, foreslå, de kunne arbejde med at måle antallet af firkanter (på papiret). Ugen efter brugte vi en firkant og en trekant med samme fremgangsmåde. Denne gang svarede 85% rigtigt på spørgsmålet om figurerne var ækvivalente og med lige stor omkreds.

To dage senere bad jeg dem danne et rektangel af alle Tangram delene. Efter et kritisk indledende øjeblik fandt de 2 eller 3 måder at gøre det på. Jeg spurgte om rektanglet og firkanten, som de havde dannet af delene, var ækvivalente og med lige stor omkreds. Denne gang svarede de alle rigtig.

[I almindelighed] uafhængig af antallet af rigtige eller forkerte svar, bemærkede jeg, at efter det, de havde opdaget under denne øvelse, blev eleverne ledt til at overveje mere, inden de udtrykte deres stilling. Vi fik mange løsninger, selv om de ikke var yderst forskellige. Det er interessant, at ingen tænkte på at kopiere fra deres sidemand, som om det objekt, der blev betragtet, var noget personligt. De arbejdede godt nok sammen, men på en funktionel måde hen imod løsningen. Specielt kunne en meget dygtig elev (pige) ikke løse problemet [find arealet af en af figurerne], fordi hun ikke kunne komme på den tanke at benytte delene. Nogle dage senere tilstod hun overfor mig, at når hun løste geometriske opgaver, tegnede hun kun figurerne for at gøre mig glad ... En anden pige, temmelig dårlig, løste problemet hurtigt ved at vende en trekant (som hun kaldte figur 1) over parallelogrammet om (figur 2) og skrive $A_2=2A_1$."

7. klasse, 4 timer for den indledende fase + andre 4 for vejledning, 14 elever

[Den indledende fase var meget lig den gennemførte i 6. klasserne, også på grund af en generel svag klasse, som var involveret i en øvelse med enkeltundervisning af elever fra en 3. klasse (8 år). Læreren mente, hun kunne bruge enkeltundervisningen til at stimulere eleverne til at genopbygge deres opfattelsesevne på det metakognitive plan ved at forklare tingene til yngre elever.] Øvelsen med enkeltundervisning blev gennemført i to 3. klasser og fulgte to adskilte faser.

I den første fase skulle eleverne, vejledt af de ældre elever tegne et 8 x 8 kvadrater Tangram på kvadreret papir med 1 cm brede kvadrater. Tangram blev så klippet ud og de yngre elever opfandt og konstruerede forskellige figurer med de 7 dele. Hver figur skulle navngives. Til sidst tegnede børnene figurerne i deres arbejdshæfter.

Den anden fase forestillede et "forstørrelses" arbejde, designet i samarbejde med den tekniske uddannelseslærer: "Gigantiske Tangram", som målte 60 cm x60 cm, blev konstrueret på 2,5 cm x 2,5 cm kvadreret papir. Tangram'erne blev limet på kort og klippet ud. Hvert barn blev bedt om at genskabe de allerede konstruerede figurer og farvelægge dem som de havde lyst til. De forskellige dele af hver figur blev fastgjort med tape, gjort stive med bambus pinde og så båret som masker.

I slutningen af øvelsen var der en kollektiv diskussion, i hvilken de yngre elever udtrykte deres overraskelse over at opdage, at fra de i starten identiske Tangram kunne de lave så forskellige figurer. De ældre elever prøvede at hjælpe de yngre til at forstå, hvorfor "nogle former så længere ud, selv om de ikke kunne være vokset", hvad ændrede sig, da der ikke var nogen forskel mellem Tangrams. Blandt de sætninger, som mest overbeviste de yngre børn, gentager vi her følgende, som synes at vise en forståelse for arbejdet og en ikke ubetydelig kapacitet af verbal gen-uddybning:

"Formerne er lige så store som tidligere, men placeringen af delene er ændret"

"Dele uden kort er ændret dvs. tomme rum" (bag denne sætning gemmer sig selvfølgelig konceptet proportionalitet, da det blev klart for drengen som ytrede det...).

KOLLEKTIV DISKUSSION OG FEEDBACK

Efter at de studerende, som gennemførte øvelserne i klasserne, præsenterede deres rapporter, fokuserede diskussionen sig på motivationsværdien af øvelsen (og alle var enige), i særdeleshed på dens potentiale i at involvere elever med mindre interesse i og evner for matematik. Meget mere interessant var reaktionerne fra elever fra forskellige niveauer. I den indledende diskussion havde nogle studerende forudsagt, at ældre elever ville være mindre interesserede. Denne forudsigelse blev ikke opfyldt, selv om det blev bemærket, at yngre elever faktisk var mere involverede i konstruktionen af fantasifulde figurer, hvorimod ældre elever straks var klar til at begynde at arbejde med geometriske figurer.

I denne fase bemærkede vi også, hvordan dette arbejde naturligt stimulerede tilegnelsen af teknikker, metoder og terminologi knyttet til geometriske transformationer. Det blev derfor foreslået, at man i klasser over 6. klasse placerede øvelsen som en forberedelse til et modul med laboratorielignende geometri efter afslutning af polygon undervisningsmodulet. Og sigte mod at reflektere over proportionalitet og isometri (særlig symmetri, transformation, rotation) så vel som at opnå kompetencer relateret til visualisering og genkendelse af geometriske figurer i almindelighed.

FORSLAG TIL VIDERE UDVIKLING

I slutningen af den konkluderende diskussion blev yderligere to øvelser foreslået, én designet og delvis allerede gennemført af én af de studerende og den anden af SSIS lektorerne:

- Tangram Web søgning. Hvis du indtaster ordet Tangram på en internet søgemaskine, får du en liste med rigtig mange websider, mange af dem foreslår undervisningsøvelser. En passende øvelse for de studerende kunne være, at identificere de mest interessante øvelser for undervisning på elevernes niveau. For eleverne kan man forestille sig, at de finder websites, som indeholder en bestemt type information eller forespørgsler, som tilskynder til yderligere søgning eller læsning.
- Tredimensionelle puslespil. Nogle elever såvel som voksne har store evner for rumlig og grafisk repræsentation, andre møder vanskeligheder på dette punkt. Og det er velkendt, at deres opfattelsesevne ikke nødvendigvis er på samme niveau på andre områder. Der findes elever med høje kompetencer på det verbale plan, og for hvem det er nemmere at memorisere en sætning som "et legeme med 8 toppunkter" end at visualisere dets billede. Og omvendt kan man visualisere en terning perfekt og have behov for at tælle antallet af toppunkter og sider hver gang.... Denne forskel i kognitiv stil gør det nødvendigt at udsætte alle elever for øvelser, som involverer både rumlighed og verbal beskrivelse, så eleverne kan komplementere deres kompetencer, og så svagere elever på det beregningsmæssige og algebraiske område, men stærke på dette andet område, også kan opnå gode resultater.

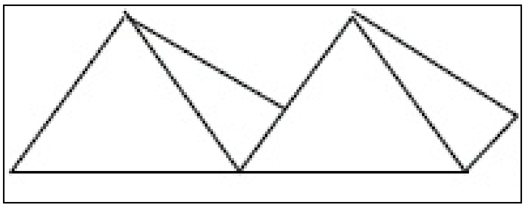
For at eksemplificere denne mekanisme blev følgende spørgsmål stillet til SSIS studerende:

> A. – "*Forestil en tetrahedron og skriv ned hvor mange flader, sider og toppunkter den har.*
>
> *Forestil dig, at du åbner tetrahedronen op, så du får dens flader foldet ud. Hvilken form har den? Er der kun én?*
>
> *En dreng konstruerede en figur ved hjælp af kvadrater og ligesidede trekanter, vi ved ikke hvor mange. Vi ved, at figuren har 5 flader, 5 toppunkter og 8 sider. Hvilken figur er det?*"

Spørgsmålene blev ikke givet med tegninger, men overladt helt til de SSIS studerendes rumlige visualisering.

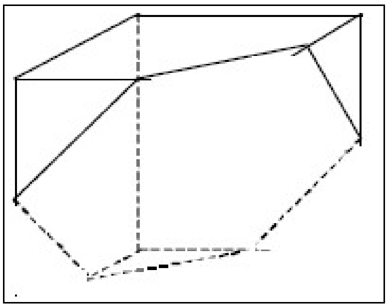
SSIS studerende syntes det var nødvendigt at forklare, at en tetrahedron er en pyramide med trekanter som grundlag og fire flader ("som silikat-ionen i kvarts" foreslog én af de studerende, idet hun benyttede sin uddannelse i kemi) for at kunne løse den første del af spørgsmålet relativt nemt. For at løse de følgende spørgsmål blev der gjort brug af hænderne til at "konstruere" genstanden i luften.

B. – "*Forestil dig to forskellige pyramider med kvadratisk grundflade. Deres sideflader er ligesidede trekanter. Sæt de to pyramider på et plan ved siden af hinanden, så de har én side (og kun én) side fælles på grundfladen. Der er et tomt rum mellem de to genstande. Kan du beskrive en genstand, som kan udfylde tomrummet, så en konveks genstand bliver dannet?*"



To 3D pyramider

C. – "Tag 3 10x10 kvadrater, skær en trekant ud med siden 5 af hver kvadrat. Betragt også en regulær sekskant med siden 5(2. Kombiner nu disse 7 dele til at konstruere en genstand som vist på figuren. Ved at sætte to af disse genstande ved siden af hinanden, hvilken genstand får vi så?"



Vores faste legeme med 7 sider

Svarene til spørgsmål B. og C. (henholdsvis en tetrahedron og en terning) er ikke intuitive, og denne type opgaver eksemplificerer overfor de studerende vanskelighederne med rumlig visualisering, som vi refererede til tidligere. Samtidig, både blandt de studerende og i klasserne, hvor øvelsen blev gennemført, var nogle i stand til at "se" løsningen meget tidligere end andre (nogle gange overraskende) og som derfor straks blev vejledere og ledere for klassekammeraterne.

D. "Tag nogle simple terninger (f.eks. træklodser) og prøv at konstruere en genstand med et bestemt antal af disse terninger. Repræsenter så denne genstand fra de forskellige mulige perspektiver (forfra, fra højre side, fra venstre side, ovenfra) ved hjælp af et givet prikket gittermønster. Og omvendt, konstruer genstanden ud fra dens givne repræsentationer."

I denne type øvelse ligger den største vanskelig selvfølgelig i at have repræsentationer på forskellige planer, nogle af dem er ikke synlige, og kræver derfor en stor rumlig opfattelsesevne. Denne øvelse er også egnet til at knytte forbindelser til andre discipliner som teknisk uddannelse og kunst samt give god støtte til en rationel beskrivelse af, hvad der virkelig bliver opnået hver gang.

LITTERATUR

Gardner, M.(1956). *Mathematics, Magic and Mistery*. Dover Pub.

Kanizsa, G. (1973). *Il 'problem-solving' nella psicologia della gestalt*, in Mosconi, G. e D'Urso, V., *La soluzione dei problemi*. Firenze: Giunti-Barbera.

Jaglom, I.M. (1972). *Le isometrie*. Bologna: Zanichelli.

Pellegrino, C. (1999). *Prospettiva: Il punto di vista della Geometria*. Bologna: Pitagora Ed.

UMI-CIIM (2001). *Matematica 2001, Materiali per il XXVII Convegno Nazionale sull'Insegnamento della matematica*. Lucca: Liceo Scientifico "A. Vallisneri".

Tredje forløb (ved South Bohemian University, České Budějovice, CZ) og konklusion

af Jaroslava Brincková and Iveta Dzúriková

Det generelle mål med forslaget til Tangram forløbet i Slovakiet var, at få lærerstuderende til at tænke over, hvilken betydning problemløsningsøvelser med måling kan få for elevernes matematiske forståelse. På kurser for de lærerstuderende benyttede vi spillet Tangram i deres forberedelse af undervisning i statisk og metrisk geometri for elever i alderen 11 - 14, hvilket vil sige i grundskolen. Hovedformålet var at udvikle kreativ tænkning og geometrisk forestillingsevne hos eleverne ved at anvende Tangram i undervisningen. Vi sigtede mod at forberede en skoleøvelse, hvori vi kunne behandle begreberne omkreds og areal i forskellige sammenhænge. Vi ønskede også at anvende Tangram til at demonstrere isometrisk transformation til måling af omkreds og areal.

Vi fokuserede på følgende delmål:

- Didaktisk afklaring af sekvensen af trin til at modellere de geometriske udtryk for omkreds og areal af plane overflader: *sansning - modellering - tegning i planet, måling - afledning af funktionelle relationer*.
- Beskrive van Hiele's niveauer for geometrisk tænkning med særlig fokus på udledning af funktionelle relationer ved hjælp af geometriske termer.
- Modellere numre og former ved anvendelse af udtrykket *måling af abscisse*
- Finde relationer mellem omkreds og areal af forskellige former.

Samarbejdspartnerne i Firenze (Italien), som deltog i projektet Tangram gav os følgende feedback (med deres syn på projektet):

Forslaget er relateret til geometriske egenskaber af tegninger, særlig til mål på areal og omkreds og til isometriske transformationer. Det er planlagt som en laboratorieøvelse, så eleverne kan bruge deres opfattelsesevne, manuelle og logiske færdigheder begyndende med konkrete genstande til at opnå geometriske og grafiske kompetencer. Efter øvelsen forventes eleverne

- *at kende grundlæggende navne og betegnelser for nogle almindelige polygoner*
- *at kunne måle længden af et segment (direkte eller, hvis nødvendigt, ved hjælp af Pythagoras læresætning)*
- *at kende ækvivalensen af plane figurerer, som kan adskilles til de samme dele.*
- *at arbejde med plane figurer ved hjælp af isometriske transformationer og deres kompositioner, og være klar over, at de nye figurer er kongruente med de tidligere.*

Vores partnere i Tjekkiet samarbejdede med en anden lærerskole (South Bohemian University, České Budějovice, underviser Helena Binterová) for at afprøve Tangram projektet. De sendte os følgende variation til projektmålene:

Gøre kommende grundskolelærere bekendt med det didaktiske hjælpemiddel "Tangram", så de bliver i stand til at benytte det senere i deres undervisning i lektioner med metrisk geometri. Hovedformålet var at definere begreber, at udvikle kreativ tænkning og geometrisk forestillingsevne samt gøre lærerstuderende opmærksomme på relaterede didaktiske vanskeligheder.

En del de lærerstuderendes obligatoriske pensum er at bevise Pythagoras læresætning samt skitsere og eftervise den valgte procedure.

Målet for alle tre deltagere i projektet Tangram har grundlæggende været ens. Eleverne kunne udvikle deres geometriske forestillingsevne via et didaktisk spil og styrke deres viden i isometrisk og metrisk geometri.

De lærerstuderende forberedte forskellige klasser. De studerede problemet med at indpasse metrisk geometri via en "foranalyse". De kunne se temaet modellering i geometri fra et nyt perspektiv via en "efteranalyse“.