

TANGRAM IN MATEMATICA PER LA SCUOLA SECONDARIA INFERIORE

di Jaroslava Brincková, Miroslav Haviar* e Iveta Dzúriková**

INTRODUZIONE

L'apprendimento è il risultato di un'attività e si sviluppa anche tramite un'attività. Fra le attività che gli alunni compiono molto spesso ci sono spesso dei giochi matematici. Se tali giochi sono fatti seguendo delle regole che soddisfano certi obiettivi didattici, vengono chiamati giochi didattici nei processi educativi. Questi giochi didattici comprendono vari puzzle geometrici, fra i quali un antico puzzle cinese chiamato Tangram.

Dal punto di vista educativo, il Tangram aiuta nell'insegnamento della geometria sviluppando:

1. le conoscenze geometriche,
2. il ragionamento,
3. l'immaginazione geometrica.

L'immaginazione geometrica è la capacità di percepire:

- figure geometriche, loro dimensione e posizione nello spazio,
- una forma data in differenti posizioni spaziali,
- cambi di forme in dimensione, struttura, ecc.,
- una forma nello spazio dalla sua proiezione piana ed una descrizione verbale,
- una rappresentazione piana di una data figura dello spazio.



* Pedagogická fakulta, Univerzita Mateja Bela, Banská Bystrica, Repubblica Slovacca.

** 8. ročné evanjelické gymnázium, Banská Bystrica, Repubblica Slovacca.

La sperimentazione principale

di Jaroslava Brincková e Iveta Džúriková

Nell'insegnamento della geometria, si possono svolgere varie attività che rafforzano l'immaginazione geometrica tramite la modellizzazione per mezzo di un Tangram di carta nel piano o di un kit Tangram nello spazio.

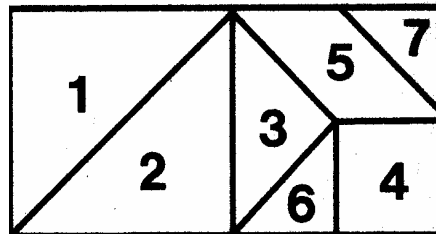


Figura 1. Pavimentazione col Tangram

Regole per l'uso del Tangram

- Si devono usare tutti e sette i pezzi del Tangram quando si crea una qualsiasi forma.
- Nessuno dei pezzi del Tangram può essere sovrapposto.
- Tutti i pezzi possono essere usati alla rovescia, se necessario.

Nell'insegnamento della geometria, le parti di un kit Tangram possono essere usate essenzialmente in due modi:

- *Per modellare una forma data prescritta* – Qui si possono mettere bene in pratica l'immaginazione costruttiva, la percezione delle forme geometriche e delle loro proprietà; il ragazzo percepisce un'area.
- *Per riempire con i pezzi una superficie delimitata* – Qui ci sono tre possibilità:
 - La forma è data tramite il suo bordo.
 - Tutti i punti della forma sono di un solo colore – una forma piena.
 - La forma è posta in un reticolo quadrettato.

Quando si modella tramite una forma data prescritta, gli alunni devono confrontare i bordi delle forme, poi scegliere un corrispondente pezzo di Tangram e porlo, convenientemente orientato, nella forma creata. Gli alunni immaginano forme geometriche, la loro dimensione e posizione nello spazio, la stessa forma in differenti posizioni spaziali, ecc.

Quando si riempie con i pezzi una superficie delimitata, ci sono differenti livelli di difficoltà. Come le ricerche mostrano, gli alunni degli ordini scolastici più bassi non percepiscono il quadrato quadrettato come uno strumento che li aiuta nel loro lavoro con i rettangoli, ma lo percepiscono come un ambiente bi-colore, come un foglio di carta con delle figure. Devono imparare gradualmente a “percepire” le parallele e la perpendicolare. Riescono molto meglio nel loro lavoro se la forma assegnata è data tramite il suo bordo.

Nell'insegnamento della geometria nella scuola secondaria inferiore, il Tangram può essere usato in vari compiti motivanti, per esercitarsi su aree, perimetri, simmetrie assiali e similitudini di forme, per provare il teorema di Pitagora e nella rappresentazione di numeri razionali. Contribuisce anche a fare pratica con le trasformazioni isometriche in geometria. Comunque, non è uno strumento ideale per l'insegnamento di concetti geometrici perché si basa su uno solo dei sette tipi di triangoli (il triangolo rettangolo isoscele), su due tipi di quadrilateri (il quadrato ed il parallelogramma) e non contiene il cerchio.

L'idea principale

L'influenza di un sussidio didattico mono-colore e multi-colore sull'efficienza del lavoro degli alunni. Sviluppare la capacità di percepire un bordo e l'area di una forma piana non-convessa.

L'influenza di un ambiente grafico (carta a quadretti, carta colorata, carta bianca) sulla capacità di proiettare un dato modello in un disegno piano. Determinare il perimetro e l'area dei differenti pezzi del puzzle.

1. Titolo: *Tangram per misurare perimetro ed area*

2. Argomenti matematici da sviluppare:

Misure di forme piane utilizzando una unità di misura non-standard.

3. Descrizione dell'attività

L'obiettivo generale di questa proposta è di far riflettere i docenti in formazione sull'importanza che i problemi di misura possono portare allo sviluppo matematico degli alunni. Facciamo uso del Tangram nei seminari per i docenti in formazione nella loro preparazione all'insegnamento della geometria ad alunni di 11-14 anni (cioè, di scuola secondaria inferiore). L'obiettivo principale è lo sviluppo del pensiero creativo e della immaginazione geometrica degli alunni. Nostro obiettivo è anche di preparare un'attività didattica in cui si tratti dei concetti di perimetro ed area in contesti differenti. Vogliamo usare il Tangram per illustrare le trasformazioni isometriche misurando perimetri ed aree.

Poniamo la nostra attenzione sui seguenti obiettivi parziali:

- Chiarificazione didattica della sequenza di fasi nella modellizzazione dei termini geometrici di perimetro ed area di forme piane: *percezione – modellizzazione – disegno nel piano – misura – derivazione di relazioni funzionali*.
- Descrizione dei livelli di pensiero geometrico di van Hiele¹, ponendo attenzione in particolare alla deduzione di relazioni funzionali utilizzando termini geometrici.
- Modellizzazione del mondo dei numeri e forme usando un segmento come unità di misura.

¹ Van Hiele, P.M.: Structure & Insight. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1983

- Trovare relazioni fra perimetro ed area di forme differenti.
- Per gli alunni di 14 anni solamente: misurare le dimensioni di forme diverse e calcolare il loro perimetro ed area, facendo uso solo del teorema di Pitagora o di espressioni algebriche.

4. Obiettivi

Per gli alunni

- Combinare l'uso di aritmetica, algebra e geometria in determinate attività.
- Usare il puzzle Tangram per modellizzare e misurare perimetro ed area in geometria piana.
- Fare congetture, prendere decisioni, controllare e verificare i risultati.

Per i docenti in formazione

- In Matematica: Studiare differenti problemi di misura in geometria. (Modellizzare relazioni fra numeri e forme).
- In Metodologia: Lavoro di gruppo – sviluppo di materiale didattico per accrescere la motivazione degli alunni. Test dei materiali fatto in quattro fasi:
 - percezione, modellizzazione e disegno;
 - definizione di concetti e misura;
 - procedure di composizione;
 - decomposizione.

Per i formatori

- Guidare i docenti in formazione ad adattare il modulo didattico ed i materiali didattici all'età, livello, necessità individuale degli alunni ed alla responsabilità della scelta dei compiti, ecc.
- Fornire istruzioni e feedback.

5. Compiti

Per i docenti in formazione

Percezione, modellizzazione e disegno

Compito n. 1 – I docenti in formazione familiarizzano con le regole del gioco Tangram. Disegnano su un foglio di carta i pezzi del gioco secondo la Figura 1. I docenti in formazione preparano il gioco in due versioni, normale e colorata, volendo dire che per la versione normale lasciano le forme 1-7 non colorate e per la versione a colori usano colori diversi per le forme che stanno vicine. Tagliano i pezzi del Tangram in entrambe le versioni. I docenti in formazione usano i pezzi del Tangram in entrambe le versioni in maniera separata per modellare i differenti puzzle della Figura 2.

I docenti in formazione usano tutti i pezzi del Tangram per creare le differenti forme della Figura 2 così come altre forme, per esempio, una ragazza, una candela, ecc.

Copiano (disegnando a mano) ciascuno dei modelli creati in entrambe le versioni (normale e colorata) su tre fogli di carta differenti: bianco, a quadretti e colorato.

I docenti in formazione discutono su come influiscano i differenti sfondi dei fogli di carta così come delle differenti versioni del Tangram sulla capacità di copiare l'esatta forma dei disegni creati per mezzo dei Tangram.

Dopo i docenti in formazione discutono su come influiscano i differenti pezzi colorati sulla capacità di percepire il contorno della forma. Notano anche che le versioni del Tangram (normale e colorata) influiscono in maniera differente sul vedere le linee del bordo dei disegni fatti.

Nel passo successivo i docenti in formazione discutono del potenziale del gioco Tangram sull'insegnamento della classificazione dei quadrilateri ad alunni di 11–14 anni.

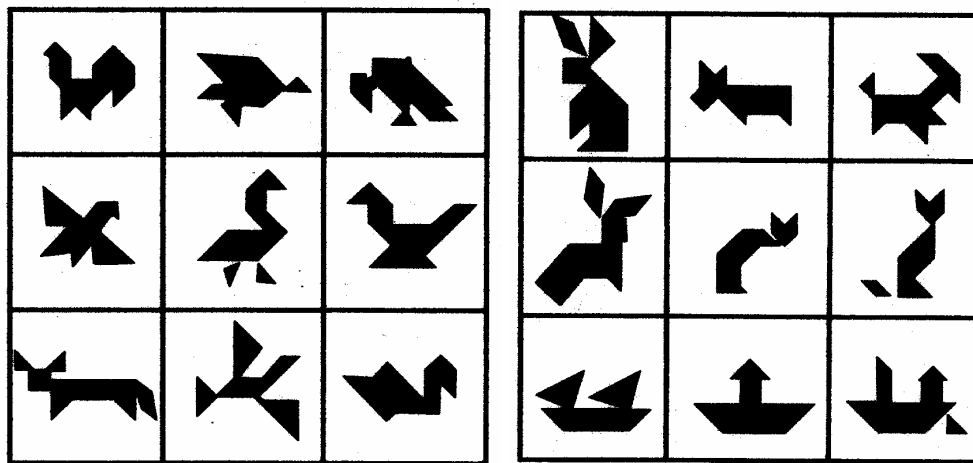


Figura 2. Disegni puzzle

Definizione di concetti e misura

Compito n. 2 – (Vedi anche la Mappa dei Termini, più sotto, o il sito web slovacco <http://www.zoznam.sk/katalogy/Vzdelavanie/Slovniky/>). I docenti in formazione trovano in un thesaurus il significato dei concetti di perimetro ed area in contesti diversi. Fanno una ricerca sui concetti di perimetro in contesti diversi (geografia, letteratura, elettrotecnica, educazione civica, arte, geometria...). Con questa attività vogliamo enfatizzare il fatto che il perimetro (l'area) è inteso in matematica come lunghezza di una curva chiusa data dalla coppia (ordinata) [numero; misura] e non come il bordo (area) di una forma piana.

Procedura di composizione [facendo riferimento alla Figura 1]

Possiamo usare due unità di misura – una è il lato s del quadrato 4, l'altra è l'ipotenusa h del triangolo 7.

Mostriamo che, dato *perimetro* (*area*), si possono fare, seguendo le istruzioni, forme piane con area (perimetro) differente.

Compito n. 3 – A partire da due triangoli del Tangram congruenti (cioè da 1 e 2, o da 6 e 7), modellare delle forme piane così da identificare i lati di uguale lunghezza.

Disegnare le soluzioni realizzate nel tuo quaderno di esercizi. Esprimere il perimetro delle forme modellate usando le unità di misura s e h .

Compito n. 4. – A partire dal quadrato 4 e dai due triangoli 6 e 7 del Tangram, fare delle forme piane così da identificare i lati di uguale lunghezza. Trovare tutte le soluzioni e classificarle secondo il perimetro, il numero e l'ampiezza degli angoli e secondo i lati paralleli.

Mettendo insieme le forme, gli alunni possono vedere che un lato del triangolo è più lungo del lato del quadrato. Ci sono così le possibilità per una discussione interessante didatticamente utile – che facciamo? Supponiamo che non ci sia concesso fare le misure – come classifichiamo le forme? Quali forme hanno lo stesso perimetro?

Possiamo usare le due unità di misura s e h . Pertanto il perimetro di A è $6s$, di B è $4s + 2h$, di C è $4s + 2h$, ... (In effetti, si può vedere che sono tutti $4s+2h$, eccetto che per la forma A). Questo motiva l'uso dei simboli (s , h) per risolvere un problema e porta anche alla domanda:

Quali sono i perimetri di tutte le altre forme Tangram?

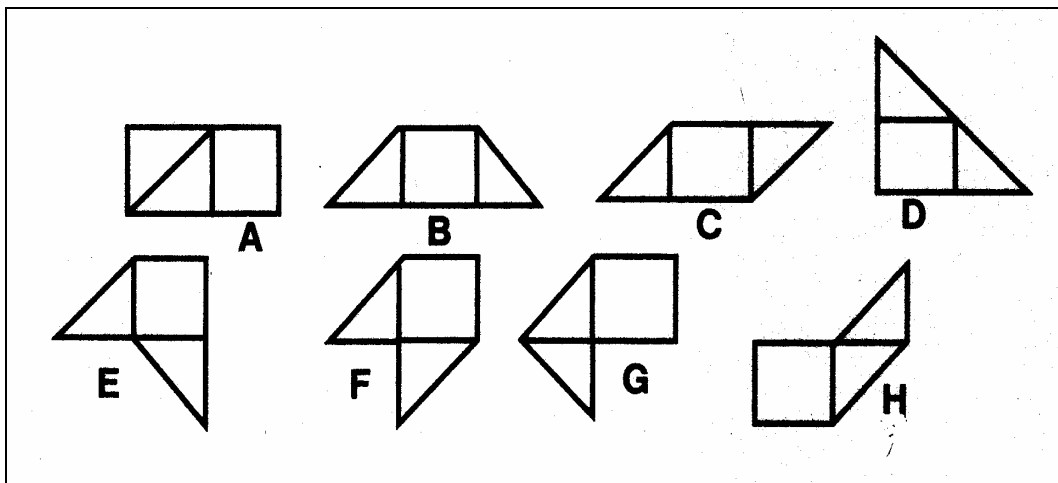


Figura 3. Risultati

Procedura di decomposizione [facendo riferimento alla Figura 1]

Compito n. 5 – Gli studenti assemblano tutti i pezzi del Tangram e creano a) un triangolo, b) un quadrato, c) un rettangolo. Guardare attentamente e trovare le differenze fra i puzzle normali e quelli colorati.

Compito n. 6 – Creare triangoli con i pezzi 2, 3, 4, 5, 6 e tutti i pezzi del Tangram colorato. Disegnare i modelli a colori. Trovare tutte le soluzioni formate di cinque pezzi.

Compito n. 7 – Una ragazzina, Barbara, ha creato una figura con cinque lati. Guardare la Figura 4 e fare una nuova forma con i pezzi numerati 3 e 5. Di quali altri pezzi del Tangram c'è bisogno per creare la stessa forma? Una delle soluzioni è di usare i pezzi 4, 6, 7. Trovare tutte le altre soluzioni.

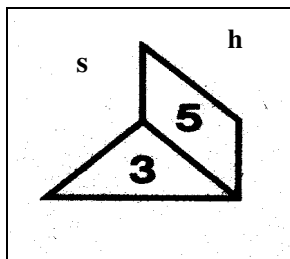


Figura 4. Una figura con cinque lati

Area e perimetro di forme piane [facendo riferimento alla Figura 1]

Compito n. 8 – Creare tutte le forme possibili con i triangoli 6 e 7. Se le unità di misura per i pezzi del Tangram sono la lunghezza s del lato del quadrato e l'ipotenusa h dei triangoli, studiare le relazioni fra perimetro ed area.

Non si deve conoscere l'altezza dei triangoli né si ha bisogno di misurare l'area per classificare le figure. Possiamo usare una unità di misura di area T (l'area del triangolo 6 o 7). Tutte le forme hanno la stessa area $2T$.

Compito n. 9 – Creare le forme della Figura 3 ed il quadrato 4 del Tangram con i triangoli 6 e 7. Confrontare loro perimetri ed aree.

Compito n. 10 – Se l'unità di area T è quella del più piccolo triangolo del Tangram, trovare l'area delle diverse parti del puzzle.

Compito speciale [facendo riferimento alla Figura 1]

Un ragazzo John mette il triangolo centrale 3 sopra al triangolo grande 1, come mostrato nella Figura 5. Calcolare l'area del trapezio così creato usando le unità di misura s e h . (Dovrebbe essere uguale all'area del triangolo 3?) Esprimere tale area in cm^2 : la lunghezza del lato piccolo del triangolo 1 è $6\sqrt{2}$ cm e quella dell'ipotenusa è $6\sqrt{2}$ cm.

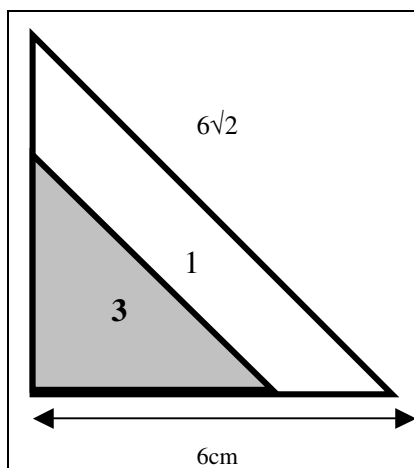


Figura 5. Trapezio

Per gli alunni

Gli alunni disegnano i pezzi del gioco su un foglio come nella Figura 1. Preparano il gioco in due versioni, normale e colorata, con questo volendo dire che per la versione normale lasciano bianche le forme geometriche 1-7 e per la versione a colori usano colori diversi per le forme che stanno vicine. Tagliano i pezzi del Tangram in

entrambe le versioni. I docenti in formazione usano i pezzi del Tangram in entrambe le versioni in maniera separata per modellare i differenti puzzle della Figura 2 e per acquisire familiarità con le regole del Tangram.

Copiano (disegnando a mano) ciascuno dei modelli creati in entrambe le versioni (normale e colorata) su tre fogli di carta differenti: bianco, a quadretti e colorato. Dopo discutono su come influiscano i differenti sfondi dei fogli di carta così come delle differenti versioni del Tangram sulla capacità di copiare l'esatta forma dei disegni creati per mezzo dei Tangram.

Gli alunni discutono su come influiscano i differenti pezzi colorati sulla capacità di percepire il contorno della forma. Dovrebbero anche notare che le versioni del Tangram (normale e colorata) influiscono in maniera differente sul vedere le linee del bordo dei disegni fatti.

Nella fase successiva gli alunni creano un gatto, un cane, una lepre usando tutti i pezzi del Tangram e discutono le potenzialità del Tangram sull'insegnamento della classificazione dei quadrilateri.

Imparano concetti matematici in inglese: base, altezza, ipotenusa, angolo retto, perpendicolare e (nel caso del Tangram) triangolo isoscele, e le nozioni collegate alle trasformazioni, come simmetria, rotazione e traslazione.

Spiegano il significato dei termini perimetro ed area in contesti differenti.

Possono usare due unità di misura – una è il lato s del quadrato 4, l'altra è l'ipotenusa h del triangolo 7. Scoprono che, dato *perimetro (area)*, si possono modellare, seguendo le istruzioni, forme piane con area (perimetro) differente.

Gli alunni creano modelli a partire dai Compiti n. 3 e n. 4. Creare tutte le forme che potete affiancando i lati congruenti. Discutere in gruppi su quante soluzioni ci siano a questo problema.

Se l'unità di area è l'area T del più piccolo triangolo del Tangram, trovare l'area dei diversi pezzi del puzzle.

Fare congetture, prendere decisioni,, controllare e verificare i risultati.

I compiti n. 6 e n. 7 sono un bonus di lavoro individuale per i migliori alunni.

Per i formatori

- Guidare i docenti in formazione ad adattare il modulo didattico ed i materiali didattici all'età, livello, necessità individuale degli alunni ed alla responsabilità della scelta dei compiti, ecc.
- Fornire istruzioni e feedback.

Conclusione

Questa proposta è progettata per futuri insegnanti di matematica nelle classi 6^a-9^a della scuola di base (11-15 di età) o nelle prime classi di scuola secondaria superiore ed è anche parte obbligatoria del corso di Didattica della Matematica.

Il luogo: La Facoltà Pedagogica della Matej Bel University, Banská Bystrica.

I formatori: Team pedagogico formato da docenti universitari, un formatore, due insegnanti di matematica ed uno di inglese.

Docenti in formazione: 18 futuri insegnanti del corso di Didattica della Matematica.

Piano di lavoro – 2 lezioni alla settimana

Settimana	Attività	
1.	Studenti	Preparare il Tangram – normale ed a colori Conoscere e usare le regole per lavorare con il puzzle Tangram Chiarire i termini geometrici usando la Mappa dei Termini
	Lavoro per casa	Motivazione per fornire chiarimenti sui quadrilateri Usare Internet per lo studio Lavorare in coppie per progettare la lezione
2.	Studenti	Discutere differenti procedure risolutive in gruppi di due o più Presentare le differenze su una tabella a colori Formare mappe dei termini Usare terminologia corretta in materie scolastiche differenti (Slovacco, Fisica, Arte, Scienze, Giochi, ecc.) Fare un'analisi critica delle presentazioni dei moduli didattici
	Lavoro per casa	Finire il modulo didattico con collegamenti interdisciplinari Fare l'analisi degli obiettivi didattici Scrivere le fasi didattiche ed i compiti per gli alunni nel modulo didattico
3.	Studenti	Verificare il modulo didattico Preparare la discussione finale sui diversi moduli didattici Preparazione di 2 futuri insegnanti che andranno ad insegnare in una classe vera Altri studenti commentano, verificano e preparano la video-registrazione
	Lavoro per casa	Analisi dei moduli didattici Preparare una lezione per alunni che non abbiano capito i materiali dell'insegnante
4.	Studenti	Studenti ed insegnante guardano il video ed analizzano la lezione concentrandosi sulla comunicazione insegnante-alunno Il formatore valuta i docenti in formazione e commentano il loro lavoro creativo
	Lavoro per casa	Creare, usando un Tangram, un logo per il corso di Didattica della Matematica

Realizzazione della successione di proposte

Realizzazione nell'aula

Evangelical Gymnasium in Banská Bystrica, Skuteckého 5. Comprende 8 classi di scuola secondaria inferiore e superiore, classe 4^a, età degli alunni 12/13, numero di alunni 21. Matematica in inglese, Geometria in inglese. Due insegnanti: di inglese e di matematica.



Gli insegnanti hanno insegnato in maniera alternata. Uno studente del corso ha fatto la ripresa video.

Scuola primaria Amos in Martin, Východná, classe 5^a, insegnamento alternato di Matematica e di Scienze. Numero di alunni 23. Due insegnanti: l'insegnante ed il docente in formazione. Ha insegnato un docente. I docenti in formazione hanno fatto la ripresa video.

La classe

Modellare nel piano – L'insegnante motiva gli alunni

Classificazione di quadrilateri

Procedure di composizione e decomposizione

Perimetro ed area.

LETTURE CONSIGLIATE

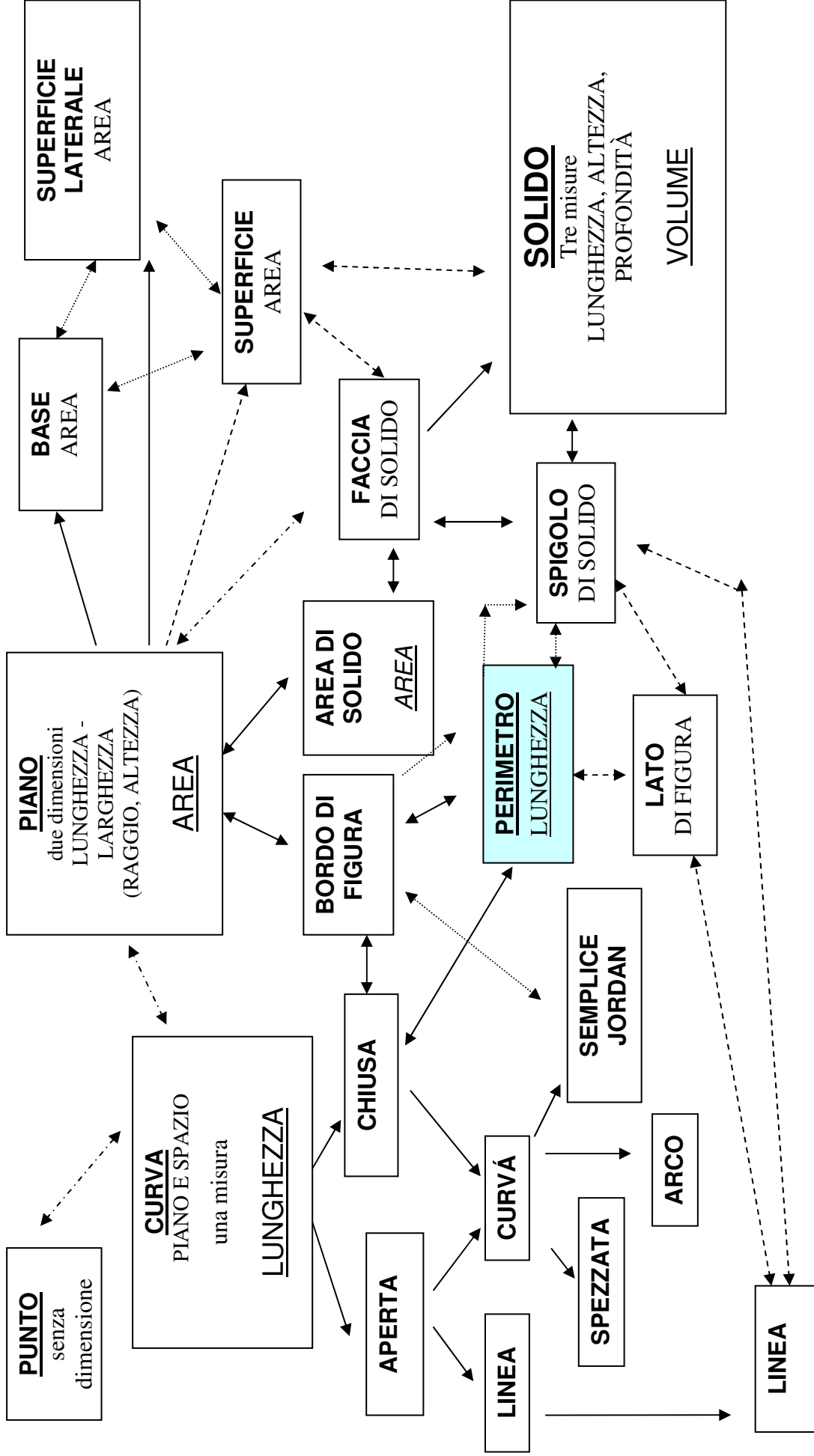
Brincková, J. (1996) *Didaktická hra v geometrii*. (Didactical games in geometry). Bratislava: DONY.

Brincková, J. (2001) *Tvorivé dielne 2* (Zamerané na didaktické hry). Banská Bystrica: PFUMB.

Millington, J. (1998) *Tangram. Puzzle picture to make you think!* Stockholm.



Mapa dei termini: TEORIA DELLA MISURA



La seconda sperimentazione

di Brunetto Piochi*

Gli insegnanti in formazione devono organizzare il maggior numero possibile di disegni piani o figure geometriche piane, usando un classico Tangram da 7 pezzi (eventualmente costruito da loro stessi). Dopo, dovranno osservare le proprietà geometriche (convessità, numero di vertici ...) di tali forme diverse, per scoprire relazioni generali o per farne una classificazione. In particolare, viene loro chiesto di usare solo alcuni pezzi designati, nella costruzione di poligoni regolari. Devono anche essere prese in considerazione le proprietà di area e perimetro delle figure (non congruenti).

Attività simili saranno realizzate con gli alunni ed i risultati della loro sperimentazione saranno poi discussi con gli insegnanti in formazione.

Argomenti matematici

La proposta è collegata alle proprietà geometriche dei disegni, in particolare alle misure dell'area e del perimetro ed alle trasformazioni geometriche.

Obiettivi

Per i formatori

- Guidare gli insegnanti in formazione dalla teoria alla pratica.
- Far sperimentare agli insegnanti in formazione un'attività da soli, prima di proporla agli alunni.
- Fornire istruzioni e and feedback.

Per gli insegnanti in formazione

- Discutere su nozioni di base di geometria e su come presentarle.
- Accorgersi della difficoltà di definire e dare un nome ad una "figura geometrica".
- Sperimentare un'attività di classificazione su figure non standard.

Per gli alunni di scuola secondaria

- Conoscere i nomi e le nozioni di base di alcuni poligoni comuni.
- Essere capaci di misurare la lunghezza di un segmento (direttamente o, se necessario, tramite il Teorema di Pitagora).
- Accorgersi dell'equivalenza di figure piane che possono essere decomposte nelle stesse parti.

* Dipartimento di Matematica, Università di Firenze, Italia.

- Lavorare con figure piane per mezzo di trasformazioni isometriche e loro composizioni, accorgendosi che le nuove figure sono congruenti alle precedenti.

Descrizione dell'attività

Le attività presso la SSIS si sono svolte con 42 allievi, del I e II anno, iscritti alla SSIS Toscana, Sede di Firenze, dell'indirizzo Scienze Naturali, per l'abilitazione all'insegnamento di Scienze Matematiche Fisiche Naturali nella Scuola Secondaria di I grado.

Fasi e tempi

- Presentazione del Tangram e attività sulle figure geometriche (1h30')
- Discussione ed elaborazione di una proposta da realizzare in classe (45')
- Sperimentazione in classe (da 3 a 5 ore di lezione, a seconda delle classi)
- Discussione finale (30')

Agli studenti SSIS sono state distribuite delle fotocopie su cartoncino rappresentanti un Tangram da ritagliare. Sono state proposte le tre attività seguenti, che sono state poi commentate insieme:

- Realizzare una griglia quadrettata 8x8 su cui andavano segnate le coordinate dei vertici da unire per realizzare un Tangram: (8,0) e (0,8); (0,0) e (4,4); (8,4) e (4,8); (2,6) e (4,8); (6,2) e (6,6); (4,4) e (6,6).
- Formare tutte le possibili forme geometriche utilizzando il quadrato e i due triangoli piccoli ed accostando i lati congruenti. Le figure realizzate andavano classificate in base al numero dei vertici, all'area e al perimetro.
- Utilizzare tutti i pezzi del Tangram per costruire un poligono noto: triangolo, quadrato, rettangolo.

Nella discussione che ne è seguita gli studenti sono stati invitati a rispondere alle domande seguenti, concentrandosi come è naturale, soprattutto sugli aspetti didattici dell'attività:

- Quali competenze sono coinvolte in attività di questo tipo? quali prerequisiti sono necessari? Quali apprendimenti vengono promossi?
- Quali difficoltà avete trovato in questa attività? Pensate che gli allievi troverebbero difficoltà ulteriori? Come si possono aiutare a superarle?
- Come potrebbe essere strutturata un'attività in classe con questo strumento? A che livello didattico? Su quali punti ritenete più importante concentrarvi?

La sperimentazione in classe è stata effettuata da docenti in formazione che stavano già svolgendo una supplenza, in modo da poter disporre di classi conosciute e da poter inserire l'attività all'interno della programmazione di classe. La proposta è stata strutturata in linea di massima durante la discussione preliminare, ma poi ogni docente in formazione l'ha adattata a proprio contesto didattico. In particolare la proposta è stata sperimentata in quattro classi (in totale circa 80 alunni di età fra 11 e



14 anni); una di queste due classi ne ha fatto oggetto di un'attività di *peer tutoring* con classi di scuola primaria.

Agli allievi è stato dato (da ritagliare, o da costruire su una griglia di coordinate) un classico Tangram quadrato composto da 7 pezzi. Utilizzando tali pezzi essi sono invitati a costruire figure piane diverse (di fantasia o geometriche) su cui poi si avvanzeranno ipotesi e verificheranno congetture. In particolare essi sono stati invitati a costruire figure con alcuni pezzi stabiliti (eventualmente tutti), individuando quali fra queste sono congruenti e ipotizzando possibili classificazioni; inoltre essi hanno dovuto riflettere sull'estensione e sul perimetro delle figure così costruite.

Al termine, gli sperimentatori hanno relazionato l'attività agli altri, commentando le ipotesi avanzate durante la discussione preliminare. Infine sono state proposte alcune attività di approfondimento ritenute particolarmente significative.

PRESENTAZIONE

L'apprendimento della Geometria, soprattutto nella scuola primaria e secondaria di I grado, ha un'importanza particolare, che va naturalmente al di là del mero accumulo degli apprendimenti relativi ad un tema specifico. La geometria infatti, sia nel suo aspetto di *organizzazione spaziale*, sia in quello di *descrizione razionale* dello spazio, riveste un ruolo cruciale nella formazione del pensiero razionale.

“Geometrizzare” l'esperienza del mondo che ci circonda è un'attività matematica primaria che precede la stessa attività del contare. Fin da piccoli infatti si tende prevalentemente e spontaneamente ad interessarsi alla rappresentazione delle esperienze attraverso l'attività grafico-pittorica, prima ancora di numerare gli stessi oggetti intorno a noi. Tale attività grafico-pittorica tende a rappresentare ed interpretare l'esperienza della realtà che ci circonda; la matematica ad un certo punto ci offre alcuni strumenti specifici per descrivere tali realtà: linee, punti, figure,...

La geometria nasce dunque dall'osservazione, dalle manipolazioni, dalle costruzioni e dalle rappresentazioni di semplici oggetti, dall'eseguire piegature, tagli, assemblaggi, dal guardare allo specchio se stessi e il mondo circostante... La successiva “geometrizzazione” non è facile né semplice, richiede una capacità di “interpretazione” che permetta di staccarsi da una visione ingenua per approdare ad una comprensione razionale complessa. Il pensiero geometrico si forma attraverso diversi livelli di insegnamento-apprendimento in tutto l'arco della vita scolastica, ma con la presenza contemporanea sia dell'aspetto concreto che di quello razionale della geometria, anche se predomina ora l'uno ora l'altro dei due, a seconda del momento dell'esperienza scolastica.

Per esemplificare questo punto, consideriamo le “figure geometriche”. Il primo approccio avviene operando su figure geometriche (elementari e regolari), descrivendone forme e alcune proprietà: è il livello che si può definire “visuale”. Questo approccio avviene, di norma, durante la scuola elementare. Successivamente si passa al riconoscimento e alla descrizione di figure in base alle proprietà apprese, a un livello “descrittivo analitico”. Vengono poi costruite definizioni, cercate proprietà

caratteristiche e appare necessario argomentare e dimostrare: siamo al livello più alto e astratto, che conduce a quello "formale" della dimostrazione dei teoremi e allo studio del sistema assiomatico (o meglio dei sistemi assiomatici) della geometria.

Il saper operare con le figure, il disegno di queste diventano di fatto strumenti essenziali per l'apprendimento geometrico: disegnando le figure se ne visualizzano caratteristiche e proprietà, poiché le proprietà dell'oggetto geometrico si traducono graficamente tramite relazioni spaziali. Tuttavia il passaggio inverso, che permette di risalire dal disegno all'oggetto geometrico, è conseguenza di un'interpretazione da parte di un soggetto umano: il riconoscimento visivo delle proprietà spaziali associate a proprietà geometriche non è spontaneo ma necessita di un apposito apprendimento. Un disegno (anche geometrico) può essere infatti interpretato in molti modi nei diversi contesti e la percezione interviene nel costruire un'interpretazione, che può naturalmente essere errata, soprattutto quando le conoscenze teoriche del lettore sono limitate e non gli permettano di passare oltre una prima lettura percettiva.

Il passaggio dall'oggetto al disegno geometrico attraverso l'individuazione di caratteristiche e dal disegno all'oggetto geometrico attraverso interpretazioni rivelano come l'attività grafica ed il suo progressivo affinarsi sono conseguenza e fonte di apprendimenti. Ad esempio essi permettono di rilevare le contraddizioni presenti in misconcetti teorici (è assai difficile far incontrare correttamente delle "altezze" di un triangolo che seguano i bordi dei quadratini...) o i vantaggi di una teoria che permette di "predire" delle conseguenze generali (l'uguaglianza del terzo lato di due triangoli aventi uguali fra loro due lati e l'angolo compreso...).

All'interno di questa concezione dell'apprendimento geometrico trovano spazio e rilevanza tutte quelle attività che si pongono come esperienze, per dir così, di confine, presentando aspetti ludici e grafici e contemporaneamente offrendo occasioni di matematizzazione più astratta. Troppo spesso la prassi didattica tende a saltare questi passaggi e il momento delicato si situa proprio nel livello della Scuola Media, dove proprio a seguito dell'insistenza su definizioni e formule staccate da un contesto concreto e calate dall'alto si viene a distorcere (in molti casi definitivamente) la visione della disciplina: l'aspetto geometrico viene vissuto come definito dalla conoscenza mnemonica di definizioni e formule. È pertanto necessario dedicare, nella formazione dei futuri insegnanti di scuola media, una cura sufficiente alla descrizione e valutazione di questo tipo di attività.

La proposta sull'uso del Tangram si situa dunque su questa linea didattica.

ATTIVITÀ CON GLI INSEGNANTI IN FORMAZIONE

A tutti gli studenti SSIS è stata distribuita la copia di un Tangram fotocopiato su di un foglio, agevolmente ritagliabile².

Proprio nella parte introduttiva dell'esperienza ci siamo discostati dallo schema proposto dai colleghi slovacchi: per motivi di tempo abbiamo evitato di far lavorare

² Ai docenti in formazione è stato anche distribuito fra i materiali lo schema di esercizi predisposto dai colleghi di Banska Brystica (SK), appositamente tradotto, cosicché ognuno avesse a disposizione il materiale su cui lavorare.

gli studenti SSIS sulla costruzione di figure libere con il Tangram. È stato comunque sottolineato ai docenti in formazione che, in questa come in ogni altra attività di tipo manipolativo e laboratoriale, la fase iniziale deve essere di esplorazione libera; da qui la necessità di lasciare agli allievi il tempo per “giocare”, esplorando i vari pezzi che si hanno a disposizione e provando a usarli per produzioni creative di tipo vario.

Si è dunque iniziato il percorso con gli studenti SSIS presentando tramite lavagna luminosa un Tangram ed una serie di figure realizzabili con esso. È stata sottolineata l'opportunità di stimolare gli allievi a lavorare individualmente o a gruppi alla costruzione di tali immagini o di altre di propria invenzione. Questa fase può forse sembrare inutile dal punto di vista matematico (molti docenti in formazione condividevano questa opinione, che comunque hanno dovuto in seguito rivedere) ma è invece cruciale sia sul piano motivazionale sia per permettere agli allievi di prendere contatto con il materiale ed esplorarne per via intuitiva i limiti e le potenzialità.

Osservando i lucidi, si è chiesto agli studenti SSIS se ritenevano tale attività facile per i loro studenti e se (fermo restando l'aspetto ludico e motivazionale) potevano ipotizzare un aspetto formativo sul piano matematico di questa fase dell'attività. Nella discussione che è seguita, pochi sono stati gli interventi e tutti sostanzialmente concordi: l'attività era facile, presentava aspetti di interesse interdisciplinare (con Educazione Artistica e Tecnica) ma questa fase dell'attività era ritenuta poco significativa matematicamente. A nostro avviso la perplessità manifestata conferma proprio la visione distorta della disciplina, a cui ci riferivamo più sopra: nonostante precedenti esperienze di laboratorio, ancora i docenti in formazione riescono con grande difficoltà a vedere il potenziale apprendimento geometrico in attività dove predomina un approccio informale³.

È interessante rilevare che poi, nelle attività in classe, questa fase è stata comunque premessa al lavoro geometrico propriamente detto. Nella discussione finale è stata confermata la relativa facilità dell'attività per gli allievi, che sono riusciti abbastanza agevolmente a realizzare le figure proposte. Tuttavia gli stessi docenti in formazione hanno rilevato come un'attività di questo tipo abbia contribuito a mettere in luce una serie di “proprietà” delle figure che l'insegnante tende a dare per scontate, proprietà relative soprattutto alla dinamicità della posizione assunta dalle figure sul piano (è noto che invece molti ragazzi tendono a visualizzare le figure geometriche in maniera statica), oppure alle diverse configurazioni della frontiera fra le forme del Tangram che vengono a costituire le differenti regioni della figura così formata (tale frontiera può essere un punto o un segmento, può comprendere in tutto o in parte uno dei lati delle forme elementari, ecc.). Il lavoro linguistico di definizione di tali situazioni che ne era seguito nelle classi aveva permesso un arricchimento del vocabolario geometrico ed era servito come base per il lavoro successivo. Alla luce di queste

³ Si ricorda che i docenti in formazione coinvolti in questa attività sono principalmente laureati in materie scientifiche ma non in matematica. Spesso il loro rapporto con la matematica e le loro concezioni di questa non differiscono molto da quelle dei loro allievi.

considerazioni, potrebbe forse risultare non inutile inserire questa fase anche nel lavoro di formazione SSIS.

L'attività n. 1 naturalmente richiede la conoscenza del piano cartesiano (nonché una certa precisione ed abilità manuale). Essa non ha presentato difficoltà particolari per i docenti in formazione, ma essi hanno supposto che i loro allievi avrebbero almeno in parte incontrato difficoltà, non possedendo tutti i prerequisiti necessari relativi al piano cartesiano. Qualora tali prerequisiti fossero invece ben saldi, alcuni docenti in formazione hanno proposto di mostrare agli allievi la sagoma del Tangram e di fornire poi loro soltanto alcune delle coordinate. La discussione che ne è scaturita ha permesso di puntualizzare come, per motivi di simmetria e a causa della misura $8=2^3$ della griglia scelta, tutti i vertici delle porzioni del Tangram sulla griglia sono comunque a coordinate intere, nonostante molti segmenti abbiano lunghezza irrazionale. Sul piano didattico, è stato interessante rilevare la diversità delle competenze richieste nell'unire punti a coordinate date o nell'indicare le coordinate di punti sul piano: si possono così costruire richieste diverse, atte a rinforzare o promuovere competenze diverse secondo le necessità dell'allievo.

L'attività n. 2. ha presentato ai docenti in formazione due differenti tipi di difficoltà (abbastanza sorprendenti per gli stessi studenti...): la necessità di individuare e definire un meccanismo di classificazione che identifichi due figure congruenti e la impossibilità di “denominare” tutte le figure. Questo ultimo punto in particolare ha di nuovo messo in luce la convinzione che geometrizzare troppo spesso sia considerato sinonimo di “denominare”. Sicuramente l'attività è risultata da questo punto di vista assai utile per la formazione dei futuri insegnanti, i quali poi nella proposta della stessa alla classe hanno potuto gestire in maniera molto più disinvolta la “scoperta” da parte degli alunni di poligoni non standard.... Gli studenti hanno poi rilevato la valenza didattica di tale proposta al fine di promuovere competenze creative negli allievi, che vengono invitati a operare un'esperienza di classificazione matematica in maniera autonoma. È stato comunque deciso di presentare tale attività agli allievi sotto forma di attività di gruppo, dato che probabilmente le competenze richieste non sono direttamente alla portata di ogni singolo studente: l'attività di gruppo permetterà di confrontarsi e di trarre vantaggio dal confronto con gli altri e dalle loro scoperte.

Una riflessione che è stata immediata per i docenti in formazione in questa attività, ma che potrebbe non esserlo (e infatti non lo è stata) per gli allievi, è che non è possibile una classificazione in base all'area di figure costruite con gli stessi pezzi, dato che tali figure sono tutte equivalenti essendo equiscomponibili.

Le difficoltà invece trovate nell'attività n. 3 sono prevalentemente riconducibili alle difficoltà (ben note alla psicologia della *gestalt*) di de-strutturare e ri-strutturare la propria visione, in modo da riuscire a visualizzare una figura data come parte di un'altra, la cui struttura mentale è a sua volta abbastanza forte e rigida. Da notare che, nelle attività poi svolte in classe, gli allievi sono stati molto più abili e veloci nello svolgere tali attività, probabilmente a causa di una struttura meno rigida per loro delle diverse figure geometriche. Del resto questo era stato previsto dalla maggior parte

degli studenti SSIS i quali nella discussione relativa all'attività avevano ipotizzato una maggior abilità dei ragazzi, basandosi sulla loro presunta maggiore capacità visiva.

SPERIMENTAZIONI NELLE CLASSI

Quattro degli studenti SSIS si sono offerti di sperimentare nelle proprie classi l'attività. Lo schema della proposta è stato concordato durante la discussione collettiva, adattandolo alle diverse classi ed alla programmazione in corso. Ai docenti in formazione che seguivano le sperimentazioni (l'insegnante della classe ed un altro docente in formazione) è stato raccomandato di prestare attenzione ai punti evidenziati nella discussione, anche al fine di verificare le ipotesi avanzate sulle difficoltà e sulla significatività dell'attività.

Un punto comune a tutte le sperimentazioni è stato che (anche a causa del periodo dell'anno in cui la sperimentazione si è svolta: febbraio) tutte le classi coinvolte hanno visto una presenza ridotta di allievi, per epidemia di influenza o attività extrascolastiche invernali.

Di seguito riportiamo alcuni brani tratti dalle relazioni finali dei docenti in formazione.

Classe 1 media, 5 ore di lavoro, 12 alunni coinvolti

[Il Tangram è stato realizzato a partire dalla griglia di coordinate e la realizzazione stessa è stata un'ottima occasione per rinfrescare le nozioni sul piano cartesiano. Dopo di che l'insegnante ha lasciato i ragazzi liberi di giocare con i pezzi] Appena tagliati i sette pezzi, subito li hanno iniziati a comporre, a girare e a metterli insieme per ricavarne immagini con un entusiasmo e un'allegria che francamente non mi aspettavo. Il commento più stupefacente è stato "Questa è vera matematica !" che significava, come in seguito il suo autore mi ha spiegato, che "ci si sta divertendo ed insieme si pensa molto e ci si ingegna".

[Ho allora proposto di fissare delle regole valide per tutti: bisognava non sovrapporre i pezzi, accostarlo lato a lato, utilizzare sempre TUTTI i pezzi. Dopo un momento iniziale di perplessità] i pezzi hanno iniziato a ruotare su ogni banco. Un momento di grande gloria l'ha avuto anche la ragazzina cinese arrivata da due settimane in classe senza sapere una parola di italiano, che dopo aver copiato e tagliato lo schema in silenzio ha iniziato ridendo a comporre figure sempre più complicate: la prima donnina, la prima barca.... Non sapevo e non volevo interromperli finché un ragazzo ha costruito "un trapezio, *profe*, un trapezio!". Ho subito colto l'occasione: "Eh sì, e mi sembra che si possano costruire anche dei quadrati, dei triangoli, dei rettangoli..." Era una nuova sfida: sempre con tutti e sette i pezzi. Quasi tutti si sono buttati nella ricerca e il rettangolo che noi studenti SSIS avevamo composto in 5-6 minuti è scaturito in un minuto e mezzo scarso. Ho controllato con discrezione e invitato a voce bassa l'autrice a coprirlo, perché volevo vedere cosa facessero gli altri: ebbene, in meno di 5 minuti ognuno aveva davanti il proprio rettangolo costruito da sé.

Da lì ho chiesto di osservare e riflettere sull'estensione di ogni figura, e partendo da figure che occupano la stessa superficie siamo passati a pensarle composte dagli

stessi pezzi che quindi, se vengono anche spostati ma restano sempre gli stessi, producono figure diverse ma che occupano la stessa superficie [...] Questa parte del lavoro è piaciuta molto, perché ciascuno poteva maneggiare e confrontare i pezzi come voleva, sbagliare e riprovare. Altre riflessioni sono venute al momento di osservare i contorni delle figure, poggiate su un altro foglio a quadretti per misurare il perimetro: come mai si ha la stessa superficie ma contorno tanto diverso in alcune figure ma non in altre...?

Classe 1 media, 4 ore di lavoro, 16 allievi coinvolti

In effetti avevo già avuto modo di osservare che spesso i ragazzi hanno difficoltà a immaginare le figure geometriche al di là del contesto libro-quaderno-lezione di geometria. In alcuni casi mi è capitato di dover essere io a guidarli nel riconoscimento di figure che essi stessi avevano già disegnato per Educazione Tecnica e che dovevano riprodurre per la lezione di geometria.

La classe alla quale ho proposto l'attività è composta prevalentemente da alunni provenienti dalla stessa classe della scuola primaria che, come ho potuto appurare all'inizio della lezione, avevano già lavorato con il Tangram. [Anche se i ricordi in realtà erano abbastanza confusi] ho ritenuto opportuno non far lavorare gli alunni nello stesso modo che avevano utilizzato alle elementari, così ci siamo spostati nell'aula di informatica dove ci siamo collegati a un sito⁴ che presenta un gioco il quale permette di giocare con i sette pezzi del Tangram per ricreare figure equiestese, di fantasia o geometriche. I pezzi possono essere ruotati (di 45° in 45°), traslati o, solo nel caso del parallelogramma, ribaltati.

L'attività è risultata divertente per tutti e ha dato luogo a osservazioni interessanti, quali ad esempio:

“è strano che le figure geometriche si girino”

“[il parallelogramma] ci sta se lo ribalto, è come se cambiasse di forma”.

In generale mi è sembrato che tutti lavorassero con impegno e via via abbiamo avuto modo di commentare che tutte le figure formate erano state ottenute dagli stessi moduli di partenza attraverso operazioni di traslazione, rotazione, ribaltamento senza deformazione. Ad una parte dell'attività ha partecipato anche una mia alunna di terza media, autistica, che si è rivelata una vera sorpresa, riuscendo a eseguire correttamente e velocemente una buona parte del gioco.”

Classe 2 media , 5 ore dedicate, 15 allievi coinvolti

“I quesiti posti venivano compresi da tutti. Anche chi di solito ha maggiori difficoltà nel lavoro didattico ha partecipato in modo autonomo trovando spesso soluzioni individuali corrette.

Nella prima lezione gli alunni sono stati invitati a utilizzare i due triangoli isosceli uguali, accostando i lati congruenti per realizzare il massimo numero di forme diverse

⁴ www.math.it

[...] Ho chiesto di riflettere su come verificare se le figure erano isoperimetriche o meno. La classe, in modo piuttosto disinvolto, ha pensato di utilizzare un righello per misurare le lunghezze dei lati, ma quando hanno scoperto che alcune dimensioni erano espresse da numeri decimali, molti hanno deciso di assumere come unità di misura un valore arbitrario, cioè hanno assegnato valore unitario alla dimensione più piccola (ne abbiamo parlato insieme) e con il teorema di Pitagora hanno trovato le altre dimensioni.

Ho chiesto poi se le figure erano equivalenti. Circa il 10% ha risposto correttamente, così ho dovuto ripetere quanto avevo già fatto in precedenza, proponendo loro di lavorare misurando il numero dei quadratini. La settimana successiva abbiamo utilizzato il quadrato e un triangolo, seguendo il metodo della lezione precedente. Alla domanda se le figure ottenute erano equivalenti e isoperimetriche, l'85% ha risposto correttamente.

A distanza di 2 giorni ho chiesto loro di formare un rettangolo, utilizzando tutte le tessere del Tangram. Dopo un primo momento di crisi generale, hanno trovato 2-3 modi di realizzarlo. Ho chiesto se il rettangolo e il quadrato da cui avevano ricavato le tessere erano equivalenti e isoperimetrici. In questo caso tutti hanno risposto correttamente.

[In generale] a parte il numero delle risposte corrette o sbagliate, ho notato che in seguito a quanto scoperto in questa attività, gli alunni erano portati a riflettere di più prima di esprimere la propria posizione. Le risoluzioni sono state tante anche se non molto diverse le une dalle altre. È interessante che nessuno ha pensato di copiare il compagno di banco, come se l'oggetto in questione fosse qualcosa di personale. Hanno sicuramente collaborato, ma in funzione delle proprie esigenze di risoluzione. In particolare un'alunna (molto brava) non è riuscita a risolvere il problema [di trovare l'area di una delle figure realizzate] perché non riusciva a ragionare utilizzando le tessere. Qualche giorno dopo mi ha confidato che, nella risoluzione di un problema geometrico, lei disegna la figura solo per accontentarmi... Un'altra ragazza, con scarso rendimento scolastico, con fare molto sicuro ha invece risolto rapidamente il problema ribaltando un triangolo (da lei chiamato figura 1) sul parallelogramma (la figura 2) scrivendo $A_2 = 2A_1$."

Classe 2 media , 4 ore dedicate alla fase iniziale + altre 4 per il tutoraggio, 14 allievi coinvolti

[La fase iniziale è stata molto simile a quella svolta nelle classi prime, data anche una certa debolezza generale della classe, la quale era però coinvolta in un'attività di *peer tutoring* con gli alunni di una classe terza di scuola primaria. L'insegnante ha pensato di utilizzare questo tutoraggio per spingere i ragazzi a rielaborare le proprie conoscenze sul piano metacognitivo, per spiegarle ad allievi più piccoli.] L'attività è stata proposta in due classi di terza elementare e si è articolata in due fasi successive.

Nella prima fase, gli alunni, guidati dai ragazzi più grandi, hanno disegnato su fogli quadrettati un Tangram di 8 x 8 quadretti, ogni quadretto di lato 1cm; il Tangram è stato ritagliato e i ragazzi più piccoli hanno ideato e costruito figure diverse con i 7

pezzi dando a ciascuna creazione un “ titolo“. Al termine i bambini hanno disegnato tali figure sui propri quaderni.

La seconda fase prevedeva invece un lavoro di “ingrandimento”, ideato in collaborazione con l’insegnante di Educazione Tecnica: sono stati costruiti su fogli quadrettati di 2.5 x 2.5 cm dei “Tangram giganti” di 60 x 60 cm. I Tangram sono stati incollati su cartoncini e poi ritagliati; ogni bambino è stato invitato a ricomporre la figura già fatta in precedenza e a colorarla secondo fantasia. I vari pezzi di ciascuna figura sono stati fissati fra di loro con nastro adesivo, irrigiditi con bacchette di bambù , per essere infine indossati come maschere.

Al termine del lavoro c’è stata una discussione collettiva, in cui i ragazzi più piccoli hanno esternato la loro sorpresa nello scoprire che dai Tangram, inizialmente tutti identici, erano state realizzate figure tanto diverse. I ragazzi più grandi hanno cercato di aiutare i compagni più piccoli a capire come mai “alcune forme sembrano più lunghe, anche se non possono essere cresciute”, cosa era cambiato dall’inizio, quando fra i Tangram non vi era differenza. Tra le frasi che hanno maggiormente convinto i più piccoli ricordiamo le seguenti, che ci sembrano dimostrare la comprensione intervenuta del lavoro e una non banale capacità di rielaborazione verbale:

“Le forme sono della stessa grandezza di prima ma è cambiata la posizione dei pezzi”

“Sono cambiate le parti senza cartoncino, cioè gli spazi vuoti” (dietro questa frase c’è naturalmente, come aveva assai chiaro il ragazzo che l’ha pronunciata, il concetto di equiestensione...).

DISCUSSIONE COLLETTIVA DI FEEDBACK

Dopo la presentazione delle relazioni da parte dei docenti in formazione che avevano sperimentato le attività in classe, la discussione si è in particolare concentrata sulla valenza motivazionale di questa attività (trovando tutti concordi), in particolare sulla sua capacità di coinvolgere anche gli allievi meno interessati e capaci in matematica. Ma notevole interesse hanno suscitato le diverse reazioni degli allievi di diverso livello scolastico: infatti nella discussione preparatoria alcuni avevano previsto che studenti più grandi sarebbero stati meno interessati. La previsione è stata smentita, pur rilevando come gli allievi più giovani si erano in effetti molto più coinvolti nella costruzione di figure di fantasia, laddove gli allievi più grandi erano stati ben presto disponibili a passare al lavoro sulle figure geometriche.

È stato anche notato in questa fase come questo lavoro stimoli in modo naturale l’acquisizione di tecniche, metodi e vocaboli legato alle trasformazioni geometriche. Da qui la proposta di considerare, nelle classi successive alla prima, l’attività come propedeutica ad un modulo di geometria laboratoriale, da collocarsi al termine della trattazione dei poligoni e che abbia come obiettivo la riflessione sull’equiestensione e le isometrie (in particolare simmetria, traslazione, rotazione), nonché il raggiungimento di competenze relative alla visualizzazione e al riconoscimento di figure geometriche in generale.

PROPOSTE PER SVILUPPI SUCCESSIVI

Al termine della discussione conclusiva sono stati proposte due attività di approfondimento, una delle quali ideata e parzialmente già realizzata da uno dei docenti in formazione, l'altra presentata dai docenti SSIS:

- Ricerca del Tangram sul web. Digitando la parola Tangram su un qualsiasi motore di ricerca Internet si ottiene l'elenco di una gran quantità di pagine web, parecchie delle quali suggeriscono attività didattiche. Un'attività formativa per i docenti in formazione può consistere nell'individuare quali siano le attività più significative per l'apprendimento al livello scolastico dei loro allievi; per gli allievi stessi invece si potrà pensare a proporre di collegarsi a siti contenenti particolari informazioni o richieste tali da mettere in modo a loro volta ricerche o approfondimenti.
- Puzzle tridimensionali. Ci sono ragazzi, ma anche adulti, che hanno capacità anche alte di visione spaziale e di rappresentazione grafica, e ragazzi che hanno su questo terreno più difficoltà. E, come è ben noto, non necessariamente queste competenze sono allo stesso livello delle altre abilità matematiche. Esistono d'altra parte studenti con alte competenze sul piano verbale per cui è più facile memorizzare la frase un "solido con 8 vertici" piuttosto che visualizzarne l'immagine; e viceversa si può visualizzare perfettamente un cubo ed avere ogni volta necessità di contarne vertici e spigoli.... Proprio questa differenza di stili cognitivi rende utile proporre tutti gli studenti attività che coinvolgano visione spaziale e descrizione verbale di solidi, al fine sia di integrare le competenze, sia di offrire possibilità di performance alta anche a studenti che abbiano deboli abilità sul piano computazionale e algebrico ma elevata capacità in questo altro campo.

Per esemplificare il meccanismo sono stati proposti agli studenti SSIS i seguenti quesiti:

A. *“Immaginate un tetraedro e scrivete quante facce, quanti spigoli, quanti vertici ha.*

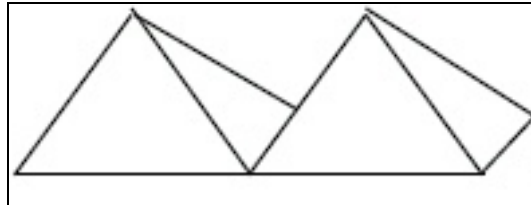
Immaginate di aprire il tetraedro in modo da ottenere il suo sviluppo piano. Che forma ha? Ne esiste uno solo?

Un ragazzo ha costruito una figura usando quadrati e triangoli equilateri, non si sa quanti. Si sa che questa figura ha 5 facce, 5 vertici e 8 spigoli. Di che figura si tratta?”

Il quesito non era accompagnato da disegni, ma si faceva appello alla visualizzazione spaziale degli studenti SSIS coinvolti.

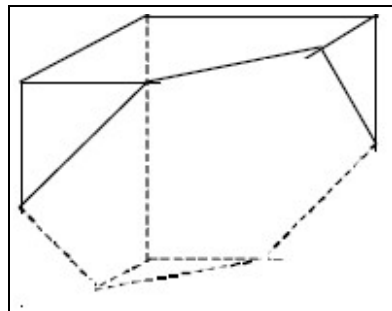
Gli studenti SSIS hanno comunque sentito il bisogno di chiarire che un tetraedro è una piramide a base triangolare con quattro facce (“come lo ione silicato del quarzo” ha suggerito una dei docenti in formazione, appoggiandosi alla sua laurea in chimica...) per poter risolvere con relativa facilità la prima parte del quesito, a cui sono seguiti ulteriori passi per risolvere anche le altre parti, eventualmente aiutandosi con le mani per “costruire” nell'aria l'oggetto.

B. – “Immaginate due diverse piramidi a base quadrata le cui facce laterali siano triangoli equilateri. Appoggiate le due piramidi su un piano, accostandole in modo che abbiano in comune uno (e uno soltanto) degli spigoli di base. Tra questi due solidi resta dunque uno spazio vuoto. Sapreste descrivere il solido che può riempire quel vuoto, in modo da ottenere un solido convesso?”



Due piramidi

C. – “Prendete 3 quadrati 10×10 , su uno spigolo di ciascuno di essi ritagliate un triangolo rettangolo di cateto 5. Considerate inoltre un esagono regolare di lato $5\sqrt{2}$. Combinare ora questi 7 pezzi per costruire un solido come in figura. Accostando due di questi solidi, quale solido regolare si viene a realizzare?”



La nostra figura solida con 7 facce

La risposta ai due quesiti B. e C. (rispettivamente, un tetraedro e un cubo) non è affatto intuitiva e questo tipo di esercizi si presta dunque bene a esemplificare ai docenti in formazione quelle difficoltà di visione spaziale di cui parlavamo sopra; contemporaneamente, sia fra gli stessi docenti in formazione sia poi nelle classi in cui l'attività viene riproposta, alcune persone (talvolta sorprendentemente) riescono a “vedere” la soluzione con largo anticipo sugli altri e si pongono immediatamente come leader e tutor dei compagni.

D. – “Prendete dei semplici cubetti (come quelli di legno da costruzioni) e provate a costruire con un numero fissato di questi un solido. Rappresentate poi questo solido dalle diverse possibili prospettive (di fronte, da destra, da sinistra, dall'alto) utilizzando una griglia data punteggiata. Viceversa, date le sue rappresentazioni, ricostruite il solido.”

Naturalmente in questo tipo di attività, la difficoltà è quella di avere rappresentazioni su piani diversi, alcuni dei quali sono di volta in volta nascosti alla vista, richiedendo ancora un notevole sforzo di rappresentazione spaziale. Tuttavia questa attività si presta bene a collegamenti con altre discipline, quali Educazione Tecnica che



Artistica, oltre a fornire un buon supporto alla descrizione razionale di quanto viene di volta in volta realizzato.

LETTURE CONSIGLIATE

Gardner, M.(1956). *Mathematics, Magic and Mystery*. Dover Pub.

Kanizsa, G. (1973). *Il 'problem-solving' nella psicologia della gestalt*, in Mosconi, G. e D'Urso, V., *La soluzione dei problemi*. Firenze: Giunti-Barbera.

Jaglom, I.M. (1972). *Le isometrie*. Bologna: Zanichelli.

Pellegrino, C. (1999). *Prospettiva: Il punto di vista della Geometria*. Bologna: Pitagora Ed.

UMI-CIIM (2001). *Matematica 2001, Materiali per il XXVII Convegno Nazionale sull'Insegnamento della matematica*. Lucca: Liceo Scientifico "A. Vallisneri".

**La terza sperimentazione (alla Jihočeská Univerzita, České
Budějovice, CZ) e Conclusioni**
di Jaroslava Brincková e Iveta Džúriková

L'obiettivo generale della proposta sul Tangram sperimentata in Slovacchia è stato di far pensare i docenti in formazione all'importanza che le attività-problemi di misura possono portare alla formazione matematica degli alunni. Abbiamo usato il gioco del Tangram nei seminari per i docenti in formazione nella loro preparazione all'insegnamento della geometria statica e metrica ad alunni di 11-14 anni, cioè di scuola secondaria inferiore. L'obiettivo principale è stato lo sviluppo del pensiero creativo e dell'immaginazione geometrica degli alunni tramite l'utilizzo del Tangram a scuola. Abbiamo mirato a preparare un'attività didattica in cui si potesse trattare dei concetti di perimetro ed area in contesti differenti. Abbiamo voluto usare il Tangram anche per mettere in evidenza le trasformazioni isometriche nella misura di perimetro ed area.

Abbiamo posto la nostra attenzione sui seguenti obiettivi parziali:

- Chiarificazione didattica della sequenza di fasi nella modellizzazione dei termini geometrici di perimetro ed area di forme piane: *percezione – modellizzazione – disegno nel piano – misura – derivazione di relazioni funzionali*.
- Descrizione dei livelli di pensiero geometrico di van Hiele, ponendo attenzione in particolare alla deduzione di relazioni funzionali utilizzando termini geometrici.
- Modellizzazione del mondo dei numeri e forme usando il termine *misura dell'ascissa*.
- Trovare relazioni fra perimetro ed area di forme differenti.

I partner in Firenze (Italia), che hanno co-sperimentato la proposta Tangram, ci hanno fornito il seguente feedback (il loro punto di vista sulla proposta):

La proposta è collegata alle proprietà geometriche dei disegni, in particolare alle misure dell'area e del perimetro ed alle trasformazioni isometriche. È progettata come attività laboratoriale, così che gli alunni devono fare uso delle loro abilità percettive, manuali e logiche, partendo da oggetti concreti per acquisire competenze geometriche e grafica. Alla fine dell'attività ci si aspetta che gli alunni sappiano

- *conoscere i nomi e le nozioni di base riguardo ad alcuni poligoni comuni*
- *misurare la lunghezza di un segmento (direttamente o, se necessario per mezzo del teorema di Pitagora)*
- *accorgersi dell'equivalenza di figure piane che possono essere scomposte nelle stesse parti*
- *lavorare con figure piane tramite trasformazioni geometriche e loro composizioni, accorgendosi che nuove figure sono congruenti alle precedenti.*

I nostri partner nella Repubblica Ceca hanno cooperato con un'altra Istituzione di formazione degli insegnanti (la Jihočeská Univerzita di České Budějovice, formatore Helena Binterová) per la sperimentazione della proposta Tangram. Loro ci hanno fornito la seguente variante degli obiettivi del progetto:

Far familiarizzare i futuri insegnanti di scuola elementare con lo strumento didattico "Tangram" così che siano capaci di usarlo dopo nel loro insegnamento, in lezioni di geometria piana e metrica. Il principale obiettivo è stato di definire concetti, di sviluppare il pensiero creativo e l'immaginazione geometrica e di rendere i docenti in formazione consapevoli delle relative difficoltà didattiche.

Uno dei compiti obbligatori per i docenti in formazione è stato di provare così come di abbozzare e motivare la procedura scelta.

Gli obiettivi di tutte e tre le sperimentazioni della proposta Tangram sono stati essenzialmente identici. Gli alunni hanno potuto sviluppare la loro immaginazione geometrica tramite un gioco didattico e di rafforzare le loro conoscenze nella geometria isometrica e metrica.

I docenti in formazione hanno preparato lezioni differenti. Hanno studiato il problema della trasformazione in geometria metrica tramite una analisi a priori. Hanno potuto vedere il tema della modellizzazione in geometria sotto una nuova prospettiva tramite una analisi a posteriori.